SIPEQ VI
VI Seminário Internacional de Pesquisa e Estudos Qualitativos
21 a 23 de setembro de 2021
Pesquisa Qualitativa
ÉTICA - LÓGICA EPISTEMOLOGIA

O TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL NO ÂMBITO DE ALGUNS TEOREMAS DE IMPOSSIBILIDADE

Rosemeire de Fatima Batistela

Universidade Estadual de Feira de Santana
rosebatistela@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta uma discussão do teorema da incompletude de Gödel juntamente com outros problemas de impossibilidade da Matemática. Trata-se de um estudo oriundo de nossa experiência vivenciada no doutorado ao estudar o teorema de Gödel e da experiência vivenciada enquanto professora de Geometria Euclidiana em um curso de formação de professores de Matemática. O teorema da incompletude aqui é tomado como figura tendo como fundo alguns teoremas de impossibilidade. Procuramos argumentar que este resultado apresenta pontos de contato com teoremas de impossibilidade, cujas soluções se mostraram impossíveis, e pontos que o diferenciam, sendo o principal que o teorema da incompletude de Gödel pertence à esfera da Metamatemática. O teorema da incompletude de Gödel demonstra que existem proposições verdadeiras, mas indecidíveis no sistema formal da teoria da Aritmética, ele diz respeito a um domínio distinto daquele no qual residem os problemas que apresentam impossibilidades específicas ou metodológicas e circunscritas na hipótese de seus enunciados, pois ele estabelece a existência de questões indecidíveis e isso explicita o alcance do método axiomático.

Palavras-chave: Teoremas de Impossibilidade. Teorema da Incompletude de Gödel. Metamatemática. Fenomenologia.

Abstract

This article presents a discussion about Gödel's incompleteness theorem along with other problems of the impossibility of Mathematics. It is a study derived from our experience in the doctorate when studying Gödel's incompletness theorem and from the experience lived as a teacher of Euclidean Geometry in a mathematics teacher formation courses. The incompleteness theorem here is taken as a figure and background some impossibility theorems. We try to argue that this result presents points of contact with impossibility theorems, whose solutions proved impossible, and points that differentiate it, the main one being that Gödel's incompleteness theorem belongs to the sphere of Metamathematics. Gödel's incompleteness theorem demonstrates that there are true but undecidable propositions in the formal system of Arithmetic's theory, it concerns a domain distinct from that in which the problems that present specific or methodological and circumscribed impossibilities reside in the hypothesis of its statements because it establishes the existence of undecidable questions and this reach the scope of the axiomatic method.

Keywords: Impossibility problems. Gödel's Incompleteness Theorem. Metamathematics. Phenomenology.

Introdução

A perspectiva assumida aqui é a fenomenológica husserliana e nesta ocasião apresentaremos um estudo oriundo de nossa experiência vivenciada com o teorema de Gödel e com os três famosos problemas clássicos da Antiguidade que no século XIX, com o desenvolvimento da Álgebra, essas impossibilidades foram demonstradas como impossíveis, nas condições que os circunscrevem, ou seja, com instrumentos euclidianos.

O teorema da incompletude de Gödel (TIG)[1] é visto como um dos mais surpreendentes[2] teoremas que evidenciam impossibilidade de resolução, porém é importante dizer que há provas de possibilidade do problema 2 de David Hilbert em sistemas imunes ao teorema de Gödel. Na História da Matemática alguns fatos apresentam situações que se assemelham, em termos de surpreenderam a comunidade, tais como, a descoberta dos incomensuráveis, o encontro com as geometrias não-euclidianas e com a teoria de Galois. Esses fatos levaram os matemáticos a admitirem, respectivamente, a impossibilidade de encontrar uma medida que seja comum para todas as medidas possíveis, de descrever o mundo físico com o modelo geométrico de Euclides e de deduzir fórmulas para encontrar raízes de polinômios de grau qualquer.

O século XIX foi para a Matemática um século em que muitos problemas, que perduravam por longo período de tempo, foram resolvidos, teorias foram criadas e fundamentos foram procurados. As construções circunscritas aos três problemas clássicos da Antiguidade[3], as quais dependiam de encontrar as raízes que satisfizessem certas equações foram provadas como logicamente impossíveis. Em outra linha, a questão que envolvia o quinto postulado de Euclides foi desvendada e estabeleceu que era impossível derivar o axioma das paralelas dos outros quatro axiomas da Geometria Euclidiana.

---

[1] Por vezes pode-se encontrar na literatura como teoria da incompletude de Gödel, dadas todas as construções, definições, e condução do raciocínio na prova do resultado. O artigo que traz o TIG é intitulado *Sobre proposições formalmente indecidíveis nos Principia Mathematica e sistemas correlatos,* foi publicado em 1931 na revista *Monatshefte für Mathematik und Physik.* A primeira divulgação deste teorema deu-se em 1930, num congresso sobre Epistemologia das Ciências Exatas em Königsberg, Lannes (2014). Também, há que se dizer que, são dois teoremas da incompletude, o primeiro que estabelece a existência de um indecidível na aritmética e o segundo que estabelece que se a aritmética for consistente ela não pode provar sua própria consistência.

[2] Inclusive ser surpreendente é um dos pontos que faz o TIG ser famoso. Ele é surpreendente porque ele se desdobra e apresenta uma impossibilidade que contraria as expectativas em termos de Fundamentação da Matemática, aquela que compreendia que o conhecimento matemático não tinha limites e que demonstração matemática e verdade matemática coincidiam. Frente aos demais teoremas famosos, ele possui uma característica que o torna único, ele não havia sido formulado antes de ser demonstrado, ele é um resultado produzido inteiramente por Gödel.

[3] Do problema da *duplicação do cubo* diz de dada a aresta de um cubo, construir a aresta de um segundo cubo cujo volume seja o dobro do primeiro. O problema da *trissecção do ângulo* pedia que estabelecesse um método para construir um outro com um terço da amplitude de um ângulo qualquer dado. Por sua vez, o problema da *quadratura do círculo* pede que, dado um círculo de área qualquer, que se construa um quadrado com mesma área do círculo.

Destacamos, desses eventos citados acima, duas ocorrências que movimentaram os matemáticos e resultaram em subprodutos importantíssimos. O primeiro, é o fato até então inédito, de dar uma prova da impossibilidade de, dentro de um sistema provar certas proposições e, segundo, a necessidade de investigar nos sistemas de axiomas "se as alegadas conclusões são de fato consequências lógicas necessárias das pressuposições iniciais." Nagel e Newman (1971, p. 20).

Nesse clima de verificação ganha força claramente o problema da consistência, qual seja, o de saber se o fundamento de um sistema é internamente consistente, isso significa saber, com certeza, que aqueles axiomas da base da teoria não geram contradições, ou seja, teoremas que sejam mutuamente provados como verdadeiros e como falsos. Essa questão da consistência ganhou lugar entre os problemas que Hilbert (2003) expôs, na palestra intitulada "problemas matemáticos", apresentando-os como os problemas que os matemáticos do novo século tinham como tarefa resolver. A introdução do texto Hilbert (2003) tem o tom de uma conversa entre um técnico esportivo e seus jogadores; seu maior incentivo vai em direção de apontar que, com a dose exata de esforço, a vitória estaria garantida. Em consonância com essa metáfora, afirma que a solubilidade de todo e qualquer problema bem formulado era certeira para ele.

O livro marco na história da Lógica foi o *Principia Mathematica* publicado em 3 volumes em 1910, 1912 e 1913 nos quais Bertrand Russel (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947) tentaram obter todas as verdades matemáticas de um conjunto bem definido de axiomas (os axiomas de Peano) e regras de inferência expressas em lógica simbólica. A questão do momento era verificar se existia alguma contradição nesses axiomas e se existia alguma proposição que não pudesse ser provada.

O TIG foi apresentado à comunidade matemática em 1931 e, nos termos de Nagel e Newman (1971, p. 19), "o artigo de Gödel é uma prova da impossibilidade de demonstrar certas proposições importantes na aritmética". Ele foi visto por essa comunidade como uma resposta de impossibilidade à resolução positiva do problema 2 de Hilbert. O TIG afirma que a consistência dos axiomas da aritmética básica de Peano é indecidível, ou seja, não existe uma sequência finita de linhas que determina se essa proposição é ou não um teorema da teoria; aponta, assim, a impossibilidade da solução desse problema.

A consistência da Aritmética era uma questão chave para o desenvolvimento da Matemática, em função das provas de consistência relativas que dela dependiam à época e, principalmente porque, dessa prova dependia o sucesso do programa de Hilbert. Uma prova de consistência absoluta era esperada e a comunidade matemática aguardava ansiosa por ela.

Da fenomenologia

Por sermos afeitos à Fenomenologia apresentamos neste ítem como entendemos as experiências vivenciadas por nós e como se associam aos conhecimentos da comunidade de Educação Matemática. Em Fenomenología *experiência vivenciada* são aquelas vivências que abrem posibilidades de constituirmos juízos que sustentam afirmações. Ales Bello (2015, p. 77) explica que "experiência é a relação que o ser humano tem com as coisas do mundo externo, mas também consigo mesmo. Trata-se de um movimento, [...] podendo ter o significado de um movimento cognoscitivo ou de experiência psíquica." As experiências vivenciadas passam pelas vivências das quais temos consciência de termos vivenciado e são possíveis quando temos estados vitais e sentimentos vitais. A experiência vivenciada se entrelaça, nas ações do corpo-vivente, de modo que "é de natureza perceptual, constituída com material hilético dos sentidos pela ação de sistemas psico-físicos proto-intencionais embutidos" Da Silva (2019, p. 323, tradução nossa)[4].

O desenvolvimento completo de um conhecimento só é possível por meio das vivências, embora elas não sejam suficientes. Em Bicudo e Afonso da Silva (2018, p. 157) encontramos que o movimento de constituição do conhecimento passa "pelo entrelaçamento dos sentidos experienciados no corpo-próprio ou corpo-encarnado, pelos diferentes órgãos dos sentidos e pela cinestesia e vão se amalgamando e possibilitando a percepção de um objeto e sua forma em termos de figura e fundo, o qual se presentifica no fluxo da consciência." O conhecimento constituído pelo sujeito é intencional e se abre ao movimento de produção do conhecimento na esfera da intersubjetividade, quando ele expressa o compreendido e articulado no movimento de constituição do conhecimento pela linguagem.

A intersubjetividade na visão fenomenológica é uma esfera constituída pelos sujeitos que estão junto no mundo-vida e se reconhecem como iguais e como diferentes de um modo direto,

[4] "real nature is perceptual nature, constituted out of the hyletic material of the senses by the action of built-in psychophysical proto-intentional systems" Da Silva (2019, p. 323).

na percepção de seus corpos-viventes, mediante o ato da intropatia[5]. Essa esfera é então constituída pelos atos da intropatia e pela linguagem e é o solo em que toda a vida histórico-sócio-cultural se assenta. A intersubjetividade expressa o entendimento de o sujeito como inserido, como parte de, como constituído na relação com o mundo-vida, Bicudo (2011, 2020). Esses significados vão sendo expressos para a comunidade e "à medida que os significados vão sendo aceitos e mantidos na repetição de atividades, realizadas por diferentes sujeitos, o conhecimento histórico-sócio-cultural se produz em uma comunidade e em grupos nela formados.". Bicudo e Afonso da Silva (2018, p. 157).

A respeito da distinção/correlação entre *hylética* e *noética*, Ales Bello (2020, p. 5-6) considera

> Esses termos são usados pelo fenomenólogo Edmund Husserl para indicar as características das nossas experiências vividas, *Erlebnisse*, isto é, nossas vivências. Algumas delas são constituídas por conteúdos de sensações: os dados das cores, dos sons, do tato e de outras semelhantes. Igualmente, compõem-se pelas impressões sensoriais do prazer, da dor e das cócegas, e pelos momentos sensoriais da esfera dos impulsos. Tudo isso é indicado pelo termo hylética, derivado do grego, cujo significado é "matéria". Aquilo que transforma os estes "materiais", como os acima exemplificados, em atos vividos intencionais é o momento consciencial, expresso pelo termo "noesi", que indica "captar o sentido" por meio de um instrumento intelectual. Isso diz respeito a todos os seres humanos, mas em algumas culturas, sobretudo nas culturas arcaicas, o momento hylético é fortemente presente: sons, cores e visões têm uma função atrativa e se tingem de afetividade e de significados, estes últimos remetem ao componente noético, sempre presente, ainda que sem uma função primária definida, como acontece, ao contrário, nas culturas que podemos definir como "complexas", dentre as quais estão, principalmente, os ocidentais. Isso não significa que o momento noético não seja ativo.

Partilhamos com Ales Bello, Ales Bello (2015), as compreensões de Edith Stein sobre a existencia de dois níveis de identidade: o pessoal e o comunitário. Ales Bello destaca que o ser humano vive singularmente, mas vive também na comunidade onde se estabelece. Ela ressalta a importância primal dessas vivências na constituição da individualidade, ao mesmo tempo em que este indivíduo participa de uma comunidade, que pode ser a científica, e levando consigo experiências individuais. Ainda, para a mesma há que se ressaltar que a soma simples das experiências individuais não basta para produzir a experiência comunitária. Para que a

[5] Na nota de rodapé 20, Bicudo (2020, p. 80-81) afirma "A intropatia é o conhecimento do outro que ocorre diretamente nas experiências em que o outro é dado (trazido, exposto) a si mesmo em sua corporeidade. É uma percepção constituinte da intersubjetividade. Não é, portanto, um conceito teórico ou uma afirmação construída predicativamente. ". Tradução nossa de: "Intropathy is knowledge of the other that occurs directly in the experiences in which the other is given (brought, exposed) to the self in its corporeality. It is a constituent perception of intersubjecivity. It is not, therefore, a theoretical concept or a predicatively constructed statement." Bicudo (2020, p. 80-81).

experiência comunitária se forme, as vivências individuais devem possuir um significado duradouro que faça surgir deles uma formação unitária superior." Ales Bello (2015). Segundo essa autora, a experiência vivenciada está no cerne da constituição da pessoa e, sendo assim, também do homem que produz ciência.

A seguir apresentamos o estudo que analisa o teorema de Gödel em relação a alguns problemas de impossibilidade tendo como pano de fundo a questão do momento histórico da Matemática, as demonstrações de impossibilidade que o antecederam e as condições que tornaram possível que o teorema de Gödel fosse demonstrado por Gödel em 1931.

O TIG no âmbito de teoremas que provam impossibilidades de certas provas

O TIG no âmbito dos resultados matemáticos popularizados aparece como uma das mais significativas realizações da Matemática do século XX, ao lado de outros teoremas matemáticos famosos[6], quais sejam, o último teorema de Fermat, o teorema das quatro cores, o teorema do empilhamento proposto por Kepler.

A respeito da fama do TIG, Feferman (2006) explica que ele contrasta com os demais teoremas famosos por não ser um resultado advindo de um problema que engajou esforços de relativo número de matemáticos, com diferentes abordagens e graus de trabalho intenso. Foi um resultado inesperado e cuja prova, embora envolvesse novas técnicas, não é a mais difícil na escala de dedicação e esforço. *Inesperado* nessa afirmação significa que está extremamente distante da expectativa que incidia sobre ele, qual seja, a concernente à resposta positiva para a completude da Aritmética.

No que tange às expectativas de solução, os três problemas clássicos da Antiguidade que durante aproximadamente 20 séculos tiveram inúmeras tentativas de prova, neste mesmo século foram provados como de impossível resolução nas condições dos enunciados dos problemas.

[6] Famosos significa: aqueles que se tornaram populares independentemente de serem teoremas ensinados nas escolas, aqueles cuja história da solução tornou-se bastante divulgada para além da Academia e da Escola. Particularmente aqui, o *Último teorema de Fermat* que é tema de um livro; *o Teorema das Quatro Cores* que é de formulação e conceituação fáceis e por isso sua resolução foi por muito tempo proposta como desafio aos menos acadêmicos, além disso, sua resolução feita por meio de um computador, pelos modos analíticos da computação, a exaustão, e tem causado discussões sobre a aceitação de tal prova; o *Teorema de Kepler* bastante divulgado por levar desde que foi formulado mais de quatrocentos anos para ser provado e depois de provado ficou sendo verificado exaustivamente por 12 matemáticos durante 4 anos e, ainda assim, até hoje, não pode ser verificado em sua totalidade.

No século XIX o problema relacionado ao quinto postulado de Euclides foi resolvido quando se apresentou a prova de que ele não decorria dos outros quatro axiomas. O quinto postulado segundo o qual *duas retas convergentes se cortarão quando são ilimitadamente prolongadas*, por não ser tão evidente como os quatro anteriores era duvidoso e suscitou a investigação sobre os fundamentos da Geometria. Nunca se conseguiu provar que este axioma era um teorema, mas pode-se entender que ele é independente dos demais e quando se utiliza a negação desse axioma junto com os quatro anteriores tem-se as geometrias não-euclidianas.

A respeito do significado da abordagem de problemas matemáticos e do valor lógico de provas de impossibilidade, Crippa (2014)[7] considera que na Matemática nova, entendida como a que se desenvolve a partir do século XIX, os problemas receberam uma solução diferente da que vinha sendo praticada. Mudou-se o significado do que se podia resolver. Os olhos dos matemáticos se abriram para, diante de um problema, se perguntarem se ele tinha solução, antes de se dedicarem à sua resolução.

Entendemos como Crippa que dado um problema matemático, a essa época, século XIX, começa-se a perguntar: este problema tem solução? Em caso afirmativo o problema é resolvido e a expressão última deste se transforma num teorema. No caso de obter-se uma resposta negativa tem-se um teorema de impossibilidade. Ambos os teoremas, teorema de possibilidade ou de impossibilidade, têm o mesmo estatuto lógico. Se este não tem solução, outra pergunta se faz: a impossibilidade é absoluta ou se relaciona aos métodos de resolução?

No caso dos problemas clássicos, a quadratura do círculo, por exemplo, somente no século XIX é que se pode provar por métodos algébricos que o problema formulado, tal como foi formulado, não podia ser provado. Contudo, é possível perceber, intuitivamente, que se pode ter um círculo de área x e construir um quadrado de mesma área x (LÜTZEN, 2010); (CRIPPA, 2010).

Um aspecto comum entre o teorema de Gödel e os demais teoremas de impossibilidade aqui referidos, é que podem ser compreendidos como resultados metamatemáticos, mas, certamente, consoante Crippa (2014) isso não era claro para seus autores, com exceção de Gödel

[7] Durante o curso "O papel da impossibilidade na Matemática Clássica" proferido pelo professor Davide Crippa, pós doutorando da Universidade Paris I, França, pelo Projeto CAPES/COFECUB "Provas, demonstrações e representação" dos programas de Pós-graduação de Filosofia e de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas de Universidade Federal da Bahia, realizado nos dias, 15, 22 e 29 de julho de 2014.

que foi contemporâneo das ideias e do trabalho de Hilbert, portanto conhecedor da Metamatemática[8] como uma Filosofia da Matemática que não é a própria Matemática, é uma metaciência que trata a partir de fora o que a Matemática é, trata de suas condições e de seus princípios que são os axiomas da Matemática.

Com base nessas considerações, afirmamos que os demais teoremas de impossibilidade (os teoremas que provaram a impossibilidade de solução, com régua e compasso, dos problemas da Antiguidade) inauguraram uma fase na qual os teoremas de possibilidade e de impossibilidade têm o mesmo peso lógico. E mais que isso, no teorema da incompletude, Gödel desenvolve sua teoria, valendo-se das ideias da Metamatemática. Frente aos outros teoremas, o TIG apresenta vasta amplitude na reverberação de seu resultado, enquanto os demais atacam problemas pontuais. O TIG estabelece-se numa ordem outra, um limite em seu modo de fazer Matemática, e não foca apenas um problema local.

Ainda em relação ao período da nova Matemática no qual está inserido o momento histórico do surgimento do TIG, Crippa (2014) afirma que em 1839 Abel apresenta um resultado que é um teorema de impossibilidade de resolver equações de quinto grau com radicais. Entre outros resultados que evidenciam seu ponto de vista, Crippa (2014) apresenta que a distância de tempo entre o teorema de Gauss que afirmava possível construir um polígono de 17 lados com régua e compasso, e a construtibilidade efetiva deste é de aproximadamente 100 anos. Discute que baseado também em outras situações, na Matemática nova, a ênfase está nas provas de construtibilidade e não na construção efetiva. Afirma que a solubilidade dos problemas se refere aos meios de resolução pelos quais se propunha e que se involucra na formulação do problema original. Este autor pondera que na Matemática anterior, aquela antes dos problemas de insolubilidade serem provados, não havia possibilidade de prova de construtibilidade sem exibição da resolução e, a importância das construções na Geometria Antiga é existencial, ainda que admita que, certamente, haja exceções.

[8] Nagel e Newman (1973) explicam que Hilbert declarou que a Metamatemática é a linguagem que versa sobre a Matemática: “Os enunciados metamatemáticos são enunciados acerca dos signos que ocorrem dentro de um sistema matemático formalizado (isto é um cálculo) acerca dos tipos e arranjos de tais signos quando eles se combinam para formar cadeias mais longas de marcas denominadas fórmulas ou acerca das relações entre fórmulas obteníveis como conseqüência das regras de manipulação específicas para elas.” (NAGEL; NEWMAN, 1973, p. 33).

Lützen (2010, p. 06) expõe que o teorema da incompletude de Gödel está entre os teoremas matemáticos modernos que afirmam impossibilidades, contudo, este autor expõe sua ideia de que na palestra proferida por Hilbert em 1900 sobre os problemas matemáticos, a importância dos resultados de impossibilidade era um fenômeno relativamente novo, mesmo estando no início do século XX. E argumenta, a partir de uma fala de Hilbert, referindo-se aos problemas, ao postulado das paralelas, à quadratura do círculo e à solução de equações de quinto grau por radicais, haver-se finalmente encontrado soluções totalmente satisfatórias e rigorosas, para esses problemas, embora em sentido diferente daquele inicialmente previsto.

À luz do exposto por Lützen (2010), o TIG é um teorema de impossibilidade e sua repercussão é grande porque o programa de Hilbert tinha seu sucesso vinculado à solução positiva do problema 2, ou seja, o programa de Hilbert, que buscava fundamentar a Matemática sob a base da Aritmética dependia, para completar seu intento, da prova da consistência dos axiomas.

Podemos afirmar, frente ao exposto acima, que Gödel foi quem então teria se perguntado se o problema 2 tinha solução. A partir de Gödel, outra pergunta se faz ante a um problema: *este problema pode ser resolvido?*

Doxiadis (2001) afirma que o resultado da incompletude afetou também os matemáticos que, a pedido de Hilbert, se empenhavam na resolução dos problemas

> [...] A partir de agora, para cada enunciado ainda não demonstrado, teremos que perguntar se pode ser um caso da aplicação do Teorema da Incompletude...Toda hipótese ou conjectura importante pode ser indemonstrável a priori! A afirmação de Hilbert, ‘na matemática não existe *ignorabimus*’, não se aplica mais; o chão que nós pisávamos foi retirado dos nossos pés! (DOXIADIS, 2001, p. 83, tradução nossa)[9].

Embebidos das visões que apresentam o teorema de Gödel como um teorema que prova a impossibilidade de provar algo, marcando um ponto de mudança no modo como a Matemática encara seus problemas e visto o ideal cognitivo dos matemáticos que lhe destinavam a capacidade de provar ou negar toda e qualquer conjectura, nos perguntamos: o que esta prova tinha de especial? Por que Hilbert foi afetado por este resultado?

---

[9] No texto original: “A partir de ahora tendremos que preguntarnos si el teorema de la incompletitud puede aplicarse a cada proposición no demostrada... ¡Toda hipótesis o conjetura importante puede ser indemostrable a priori! Las palabras de Hilbert de que en matemáticas no hay ignorabimus ya no tienen sentido. ¡Han sacudido el propio suelo que pisamos!” (DOXIADIS, 2001, p. 83).

Entre os principais resultados que quebraram a soberania da Matemática, temos, por exemplo, as seguintes impossibilidades: de encontrar uma medida padrão para todas as medidas possíveis (crise dos incomensuráveis), de descrever o mundo físico com apenas um modelo geométrico (geometrias não-euclidianas), de deduzir fórmulas algébricas para encontrar raízes de polinômios de grau qualquer (teoria de Galois), de construir com régua e compasso soluções para os três problemas clássicos da Antiguidade: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.

Todos esses resultados de impossibilidade, e talvez outros, eram conhecidos por Hilbert, muito embora, como acima interpretado por Lützen (2010), ele os percebia (referindo-se à prova de que o quinto postulado era um postulado, à prova da impossibilidade da quadratura do círculo e à impossibilidade de solução de equações de quinto grau por radicais) como provados de forma diferente do previsto. Trata-se de uma experiência diferente, pois trabalhavam, naquele momento, com problemas originais que solicitavam uma solução, a partir das demarcações na hipótese para uma solução de um determinado tipo. Contudo, as provas de impossibilidade não fornecem uma solução para os problemas, mas mostra como uma solução para estes está fora de alcance.

A impossibilidade, nesses casos, está relacionada ao método da resolução. Podemos intuir e, por exemplo, construir com um software a construção da duplicação do cubo, da trissecção do ângulo ou da quadratura do círculo. Porém, os teoremas de impossibilidade referem-se ao método de construção com régua e compasso. Seus resultados afirmam não ser possível resolvê-los com régua e compasso: que essas construções não podem ser realizadas satisfazendo-se as hipóteses dos teoremas, mas podem ser realizadas de outros modos.

Nossa compreensão é que os teoremas acima chamados de teoremas de impossibilidade são resultados positivos e não produziram reverberação no ideal de Hilbert para a Matemática, cuja crença diretriz era que toda verdade matemática poderia ser provada, pois são teoremas matemáticos de uma Matemática que vinha sendo historicamente praticada, compreendida e realizada da mesma forma: por demonstrações de seus teoremas.

Compreendendo o TIG frente aos demais problemas de impossibilidade

Esse artigo busca apresentar as condições que tornaram possível que o teorema de Gödel fosse demonstrado no mesmo século em que os três problemas clássicos da Antiguidade, ou seja, as construções que suas resoluções solicitavam, são provados como logicamente impossíveis. Nossa intenção não é suscitar um pensamento de hierarquia entre os problemas de impossibilidade é explicitar que o TIG pertence a outra esfera de modos de praticar-se a resolução de teoremas matemáticos. Compreendemos que o resultado de Gödel fala sobre teorias que contém a Aritmética. Metaforicamente, podemos dizer que cada teorema de impossibilidade pode pertencer a uma de muitas esferas concêntricas de raios diferentes, muito embora não iremos entrar neste mérito do que determinaria o tamanho do raio. Também não trataremos dos teoremas de impossibilidade, que não são para nós mais do que teoremas de impossibilidade, tais como os clássicos da Antiguidade, o de Fermat que articulam ideias de Álgebra com Geometria Plana. O teorema de Gödel é um resultado da Metamatemática, pois afirma sobre teorias que contenham a Aritmética. Na metáfora que estamos tecendo sobre as esferas, o TIG pertence a outra esfera e diz respeito a todas as teorias que contém a Aritmética.

Nagel e Newman (1973, p. 32-33) explanam que Hilbert “fazia distinção entre Matemática (sistema de signos sem significação) e Metamatemática (enunciados significativos sobre a Matemática, os signos que ocorrem no cálculo, seus arranjos e relações)”. Torna-se mais claro para nós a partir dessas considerações, o motivo do abalo que o teorema de Gödel provocou em Hilbert, pois sendo a Metamatemática um discurso sobre a Matemática, o resultado de Gödel era o próprio autorretrato da Matemática. Um autorretrato que dizia, na extensão de seu significado, que ela não poderia ser circunscrita sob as hipóteses da axiomatização e da Aritmética de Peano. Por ter sido provado no âmbito da Aritmética básica a reverberação do TIG, esse autorretrato feito pela própria Matemática, com seus próprios métodos em uma teoria basal, apontou sua incompletude. Gödel compreendeu a mensagem de seu próprio teorema como positiva por mostrar características do método matemático de provar suas verdades.

REFERÊNCIAS

ALES BELLO, A. *Pessoa e comunidade. Comentários: Psicologia e Ciências do Espírito de Edith Stein*. Belo Horizonte: Ed. Artesã, 2015.

ALES BELLO, A. O sacramento da Eucaristia, entre a hylética e a noética. *Reflexão*. Campinas, n. 45, 2020, p. 1-8.

CRIPPA, D. A solução cartesiana da quadratura do círculo. *Scientiae studia*, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 597-621, 2010.

CRIPPA, D. *O Papel da impossibilidade na Matemática Clássica*. Minicurso realizado na Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal da Bahia, 2014.

BICUDO, M. A. V. Aspectos da pesquisa qualitativa efetuada em uma abordagem fenomenológica. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). *Pesquisa qualitativa segundo uma visão fenomenológica*. 1. ed. São Paulo: Editora Cortez, 2011, p. 29-40.

BICUDO, M. A. V.; AFONSO DA SILVA, A. Análise de descrições de vivências em situação de constituição de conhecimento. In: COSTA, A. P.; M.C. SÁNCHEZ-GÓMEZ, M.C.; CILLEROS, M. V. M. *A prática na Investigação Qualitativa: exemplos de estudos*. Aveiro: Edicão Ludomedia, 2018, p. 158-178.

BICUDO, M. A. V. Constituting Mathematical Knowledge Being-with-Media in Cyberspace. In: BICUDO, M. A. V. (editor). *Constitution and Production of Mathematics in the Cyberspace A Phenomenological Approach*. Switzerland: Springer, 2020, p. 67-85.

DA SILVA, J. J. How Does Mathematics Get into Science, and Why? A Husserlian Perspective. *Meta: Research in Hermeneutics, Phenomenology, and Practical Philosophy*. v. XI, n. 2, 2019, p. 323-357.

DOXIADIS, A. *Tio Petrus e a conjectura de Goldbach*. Lisboa: Editora 34, 2001.

HILBERT, D. Problemas matemáticos. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Tradução de S. Nobre. v. 3, n. 5, p. 5 -12, 2003.

LANNES, W. Sobre as implicações do Teorema de Gödel na organização social de Matemáticos e Lógicos no Século XX. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA, 14, 2014, Belo Horizonte. A*nais*... Belo Horizonte: Anais Eletrônicos SNHCT, 2014, v.1, p. 1-10.

LÜTZEN, J. The Algebra of Geometric Impossibility: Descartes and Montucla on the Impossibility of the Duplication of the Cube and the Trisection of the Angle. *Centaurus*, v. 52, p. 4-37, fev. 2010. doi: 10.1111/j.1600-0498.2009.00160.x

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. *Prova de Gödel*. Tradução de Gita K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo, 1973.