a) Área de conhecimento: 4. Ensino de Ciências: Biológicas, Exatas, Sociais, Humanas.

b) Modalidade de Pesquisa: 8. Fenomenológica.

Trabalho a ser apresentado de acordo com:

- Tema/modalidade de pesquisa: Fenomenológica.

# AVANÇOS DE UMA PESQUISA SOBRE O TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**Rosemeire de Fatima Batistela**

*Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS*
*rosebatistela@gmail.com*

## Resumo

Neste trabalho objetivamos apresentar pesquisas que vem sendo realizadas por nós as quais se articulam com o tema *o teorema da incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática*. Trata-se de investigações que surgem devido á nossa percepção de lacunas temáticas desencadeada no processo de investigação de nosso trabalho apresentado como tese de doutorado. Tanto na tese como nessas investigações posteriores, a modalidade de pesquisa assumida por nós é a pesquisa qualitativa fenomenológica. Nesta oportunidade as concepções de nossa opção metodológica aparecerão de forma espalhada no texto sem a intenção de ser detalhada, pois nosso foco pretende ser o de mostrar algumas lacunas percebidas as quais vêm sendo tratadas atualmente. Versaremos sobre quatro pesquisas cujos objetivos, respectivamente, são compreender: como fará sentido o teorema da incompletude de Gödel para estudantes de licenciatura em Matemática da UEFS; como o teorema da incompletude de Gödel impediu o completamento do projeto de vida de David Hilbert, o Formalismo; que é isto o indecidível de Gödel e qual seu impacto na Matemática; e, como o teorema da incompletude de Gödel impacta e repercute na Física.

**Palavras-chave:** Teorema da Incompletude de Gödel (TIG). Licenciatura em Matemática. Método axiomático. Física. Fenomenologia.

## Abstract

In this paper we aim to present research that has been carried out by us, which articulate with the theme Gödel 's incompleteness theorem in undergraduate courses in Mathematics. These are investigations that tell of lacunar aspects that were being developed and understood in the process of investigation of the work presented as doctoral thesis. Both in the thesis and in these later investigations, the modality of research assumed by us is the phenomenological qualitative research. In this opportunity the conceptions of our methodological option will appear in a scattered way in the text without the intention of being detailed, because our focus is to show some perceived gaps that are being treated today. We will cover five researches whose objectives, respectively, are to understand: how will Gödel's incompleteness theorem for UEFS Mathematics undergraduate students make sense; as Gödel's incompleteness theorem prevented the completion of David Hilbert's project of life, Formalism; which is this the undecidable of Gödel and what its impact in Mathematics; and, as the incompleteness theorem of Gödel impacts and reverberates in Physics.

**Keywords:** Gödel’s Incompleteness Theorem. Secondary Mathematics Courses. Axiomatic Method. Physics. Phenomenology.

**Introdução**

Na Educação Matemática brasileira encontramos uma pesquisa realizada em nível de doutorado que propôs a inserção do ensino do *Teorema da Incompletude de Gödel* (*TIG*) em cursos de licenciatura em Matemática. Na investigação uma pesquisa bibliográfica foi realizada sobre este teorema, seu entorno, as personagens envolvidas no evento de sua apresentação, as repercussões deste resultado na Matemática, entre outras. Apresentou-se uma possibilidade de esses sentidos e significados acessados pela pesquisa serem atualizados em cursos de licenciatura em Matemática. Tomou-se um curso de licenciatura como exemplar para se pensar a proposta de modo a não modificar o projeto pedagógico do curso, nem acrescentar ou subtrair disciplinas ou horas aula, ou seja, considerando o já historicamente realizado na realidade mundana. Desse modo, a indicação tratou de propor a inserção de trabalho com o TIG em momentos do curso abordando ideias que permeiam o resultado da incompletude e por meio dos pontos de contato entre os conteúdos já ensinados e aspectos do teorema da incompletude.

Este teorema é um dos resultados mais importantes da Lógica Matemática. Ele foi provado pelo matemático e lógico austríaco Kurt Frederich Gödel (1906-1978) em 1931. Por vezes se diz teoremas da incompletude de Gödel, por se tratar de dois resultados obtidos em momentos diferentes, sendo o segundo deles um corolário do primeiro. Nós optamos por tratar no singular como teorema da incompletude de Gödel. Porém, detalhamos: o primeiro teorema demonstra “que a aritmética formal, e por extensão a maior parte das teorias matemáticas interessantes, era *incompleta* (e, pior, incompletável).” (DA SILVA, 2007, p. 204); e o segundo prova “que a demonstração da consistência da aritmética formal era *impossível* por métodos que pudessem ser formalizados na própria aritmética formal.” (DA SILVA, 2007, p. 204 -205).

O TIG ratifica um limite técnico em relação ao modo de se fazer Matemática e concebemos que, por isso, ele é um conhecimento fundamental na cultura matemática de um professor de matemática, pois seus resultados se relacionan diretamente ao modo como compreendemos a Matemática e, por conseguinte, ao modo como a ensinamos.

No bojo dessa compreensão, a prova da existência inevitável de uma sentença verdadeira e não demonstrável em uma teoria, revela que não há conhecimento isolado, pois para que se se possa provar uma dessas sentenças faz-se necessário outro(s) axioma(s) ou outro(s) teorema(s) os quais ainda são desconhecidos. Disso, o conjunto de axiomas proposto por Giuseppe Peano (1858-1932)[1] para a aritmética básica não é capaz de provar todas as verdades da teoria. A incompletude das teorias que contenham os axiomas da aritmética básica em seu sistema axiomático aponta a inatingibilidade de qualquer sistematização final de numerosas áreas importantes e, também, a impossibilidade de que muitos ramos desta estejam inteiramente livres de contradição interna (NAGEL; NEWMAN, 1973, p. 16).

Em relação ao impacto do TIG na Matemática escolar, Fefermann (2006) afirma que este resultado pertence especificamente à Matemática formal e não atinge diretamente nenhum conteúdo da Matemática escolar. Em nossa perspectiva, mesmo não tendo relação com os conteúdos que um professor ensina na escola, o conhecimento do TIG é fundamental uma vez que ele impacta na concepção hegemônica de Matemática existente à época e cremos que isso pode fazer o profesor refletir sobre sua concepção da própria Matemática e de seu ensino. Enquanto professores de cursos de formação de professores atentos ao processo de formação que oferecemos nos cursos de licenciatura em Matemática e pre-ocupados com o devir dos estudantes refletimos que o ensino do TIG debe ser inserido nos cursos pois ele pode possibilitar uma clareza dos professorandos a respeito da ciência que ensinam, podendo ter conhecimentos que lhes permitam ter atitudes que não alimentem a ideia plasmada na concepção de soberania, tomando a Matemática como ciência da verdade absoluta, muitas vezes mitificada no meio acadêmico.

Temos observado em nossa prática profissional, ensinando em cursos de licenciatura em Matemática, que as concepções dos estudantes sobre o que é a Matemática são desprovidas da maturidade esperada de um professor de Matemática, no sentido de conhecimento sobre o método da Matemática e sobre questões filosóficas de sua ontologia. Também viemos entendendo que se faz necessário ir afundo na compreensão do que é a sentença verdadeira e não provável de Gödel e de como ela influenciou nos projetos de fundamentação da Matemática. Ao mesmo tempo nos interessamos por estudar as repercussões deste teorema nas ciências vizinhas, particularmente a Física que utiliza os

[1] Os axiomas de Peano, também conhecidos como axiomas de Dedekind-Peano, pois Richard Dedekind (1831-1916), em 1888, propôs uma coleção de axiomas para os números naturais e Peano em 1889 publicou uma versão mais precisamente formulada das anteriores, em uma coleção de axiomas no seu livro, "Os princípios da Aritmética apresentados por um novo método" (*Arithmetices principia, nova methodo exposita*). Esse conjunto de axiomas é o mesmo desde quando foram criados.

modelos matemáticos em sua formalização. A seguir expomos os temas aos quais estamos nos dedicando.

**Avanços da proposta de inserção do teorema da incompletude de Gödel na licenciatura em Matemática**

**2.1 Avanço 1: A visão de mundo de estudantes sobre a Matemática incompleta**

Uma vez conscientes da importância do ensino do TIG em cursos de licenciatura em Matemática e empenhados numa Educação Matemática que pre-ocupa-se em propor experiências na quais os futuros professores tenham a oportunidade de discutir questões de Filosofia da Matemática referentes à ela própria, buscamos a continuidade de estudos e o desenvolvimento de pesquisas sobre questões que têm se mostrado a nós como relevantes para a Educação Matemática em conjunto com a Filosofia da Matemática e a Filosofia.

Uma questão mostrou-se relevante para nós: como para o licenciando em Matemática, comumente inserido em discussões e atmosfera que compreende a Matemática como soberana, fará sentido, se fizer, essa visão de mundo de Matemática incompleta?

Trazendo para o contexto atual de trabalho na universidade, propomos uma investigação que tem como pergunta norteadora: como, para o licenciando em Matemática da *Universidade Estadual de Feira de Santana*, da disciplina *Evolução Matemática* do último semestre do curso, fará sentido, se fizer, a visão de mundo de Matemática incompleta trazida pelo teorema de Gödel?[2] Num segundo momento investigaremos como essa visão de mundo pode interferir em suas concepções sobre o conhecimento matemático, em particular, sobre a Educação Matemática.

Para o desenvolvimento desta pesquisa elaboramos um curso sobre o TIG que trata de apresentá-lo, bem como, abordar seu entorno histórico-cultural e sua importância na Matemática. Em síntese, a proposta apresenta que à época do aparecimento do TIG reinava a concepção que trazia o entendimento de que não havia *ignorabimus*[3], (HILBERT, 2003), isto

[2] Projeto de Pesquisa aprovado pela RESOLUÇÃO CONSEPE 114/2017, da Universidade Estadual de Feira de Santana, em 7 de novembro de 2017.

[3] Em Hilbert (2003, p. 11) pode-se ler: “O axioma da solubilidade de cada problema é somente uma particularidade característica do pensamento matemático ou é possível uma lei geral inerente à natureza de nosso pensamento que todas as perguntas colocadas possuem respostas? [...] Esta convicção de que a solubilidade de um problema matemático nos dá um forte estímulo durante o trabalho, nós ouvimos um grito contínuo que vem de dentro: *Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der*

é, de que não haveria problema bem colocado, que com o devido empenho dos matemáticos, não tivesse solução. Após Gödel, essa concepção não se sustenta mais. O encontro de Gödel com a sentença verdadeira e indemonstrável na prova de seu teorema confere a esta ciência o fato de que nela há sentenças matematicamente bem formuladas e verdadeiras que não podem ser formalmente expressas como tal. Ainda, na proposta priorizamos apresentar a Matemática após o TIG e como ela segue sendo construída após este revés.

Para a constituição dos dados da pesquisa foi realizado o curso proposto em 10 horas com o público acima mencionado. Durante o curso o professor pesquisador fez registro das dúvidas e das questões levantadas pelos estudantes e na última aula pediu aos estudantes que registrem na forma escrita o que ficou para eles das aulas e da discussão sobre o TIG.

Para análise dos dados (constituídos pela descrição da experiência do professor pesquisador em relação ao curso sobre o TIG e pelos textos dos estudantes sobre o que foi relevante para eles no curso) utilizaremos os princípios da fenomenologia, Husserl (2005; 2006), enquanto movimento de investigação direta, que é o "ir-à-coisa-mesma. O ir-à-coisa-mesma é composto essencialmente pelo movimento da descrição da percepção do pesquisador sobre os aspectos que percebe durante o movimento de dar voltas ao redor do fenômeno. A análise será efetuada destacando as Unidades de Significado (U.S.), tendo-se sempre como orientação a pergunta diretriz da pesquisa. Em seguida, a análise nomotética tomará as U.S. que forem extraídas e categorizadas no momento anterior (na análise ideográfica) e buscará identificar as ideias gerais contidas nestas, as quais serão compreendidas e visualizadas, nesta ocasião, como um todo. Estas U.S. serão submetidas a um olhar integrador, reflexivo e interpretativo que permitirá uma emersão de convergências e divergências às quais permitem a constituição de uma ou mais sínteses explicativas que integram as ideias gerais que desvelarão a estrutura do fenômeno situado.

Essa pesquisa encontra-se na fase de constituição dos dados após a realização do curso de 10 horas numa turma com 18 estudantes dos quais apenas 6 participaram de todas as aulas.

Em relação aos estudantes que realizaram o curso, nosso anseio para com eles com esse curso, é sobretudo desenvolver com eles um repertório que lhes permitam articular as

---

*Mathematik gibt es kein Ignorabimus!* (*Aí está o problema, procura a solução. Você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois na Matemática não existe "ignoremos"!*)".

informações matemáticas ensinadas nas distintas disciplinas do curso e refletir sobre elas constituindo uma visão de Matemática ampla o suficiente para conhecer seu alcance; e também, proporcionar situações que os levem a questionar a postura frequentemente adotada de superioridade do professor de Matemática na Universidade e na Escola, por exemplo. Numa esfera mais ampla objetivamos permitir que os estudantes conheçam a impossibilidade de a Matemática ser um sistema único e total, para que tenham condições de realizarem uma prática profissional que seja livre da concepção apregoada de Matemática como soberana e respondedora de todas as questões.

### 2.2 Avanço 2: Uma hermenêutica da frase "Ninguém nos poderá expulsar do Paraíso que Cantor criou"

Durante estudo do TIG no processo da pesquisa de doutorado tomamos conhecimento do impacto desse resultado principalmente sobre a concepção de Matemática vigente à época, aquela que diz de não haver *ignorabimus* nessa ciência. Entre outros aspectos também tomamos conhecimento de que Hilbert em 1925 numa palestra na qual falou *sobre o infinito*, proferiu a seguinte frase em tom de promessa aos matemáticos presentes: *Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós*. Nessa palestra Hilbert apresentou *sobre o infinito* e focou em apresentar os pormenores de seu Projeto (Formalismo) que visava establecer os fundamentos da Matemática em vista dos paradoxos encontrados na teoria dos conjuntos. Para Hilbert, os paradoxos teriam que ser eliminados pois, "o fato de que qualquer coisa é derivável de uma contradição, as consequências dos paradoxos para uma teoria na qual eles são deriváveis são completamente intoleráveis". Snapper (1984, p. 91).

O Formalismo era sua proposta para a eliminação dos paradoxos da Matemática e para o sucesso de seu projeto fazia-se necessário *a prova da consistência da aritmética*. Trata-se de um dos 23 problemas que ele havia apresentado como cruciais para o desenvolvimento da Matemática na palestra de 1900 no Congresso Internacional de Matemática ocorrido em Paris. Havia provas parciais da consistência da aritmética, realizadas por alunos de Hilbert, e a crença geral dos matemáticos era que a prova definitiva era somente uma questão de tempo e de empenho dos matemáticos.

Ocorre que o resultado da incompletude atesta exatamente o contrário à expectativa sobre o problema da consistência: o segundo teorema de Gödel estabelece que a prova da consistência da aritmética não pode ser realizada nas condições circunscritas no enunciado do problema, conforme já explicitado.

Assim, de certa forma, o TIG inside sobre a frase de Hilbert que afirmava que ninguém tiraria os matemáticos do paraíso da teoria dos conjuntos que Cantor havia criado. Nossa compreensão sinaliza que a frase *Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós* clama por um desvelamento, pois, o que compreendemos até o momento é que o TIG foi um/o elemento importante na expulsão dos matemáticos do paraíso ao por fim ao programa de Hilbert em sua tesitura original.

Nosso objetivo nessa investigação que se apresenta é realizar um estudo hermenêutico o sobre o tema de modo a ir interpretando e expresando nossa compreensão em relação à frase, ao contexto matemático em que ela foi proferida, as personagens envolvidas, a teoria mencionada, e por fim apresentar a validade dessa frase atualmente bem como apresentar a concepção de Matemática atualmente após a expulsão dos matemáticos do paraíso.

Silva (2007, p. 206) afirma citando Reid (1996), a reação de Hilbert aos teoremas de Gödel, foi "um tanto irritada" e não é difícil imaginar o porquê, já que o TIG explicitou que a prova da consistência de teorias formais interesantes exigirian recursos não finitários. Entretanto, o próprio Gödel observou que seus resultados não constituíam um golpe fatal no programa de Hilbert, pois seria concebível que houvesse procedimentos finitários que não fossem formalizáveis na aritmética formal. Seja como for, o programa de Hilbert certamente foi substancialmente enfraquecido pelos notáveis resultados de Gödel, entretanto, ele, o programa de Hilbert, não morreu e o próprio Gödel contribuiu para uma versão modificada dele.

Nesta investigação planejamos nossos primeiros passos pondo-nos no movimento de dar voltas em torno do fenômeno começando pelo estudo do solo cultural da Matemática, à época do surgimento do teorema da incompletude e a concepção de verdade matemática. É sabido que a frase se refere à teoria dos conjuntos criada por George Cantor (1845 -1918) e tomada como excelente linguagem da Matemática. Desse modo, estudaremos o que foram as contradições e a auto-referência, reveladas pelos paradoxos encontrados nessa teoria para entendermos o *paraíso* a que se referiu Hilbert. Estamos em marcha com essa pesquisa que busca realizar uma hermenêutica da célebre frase. Até este momento estudamos os paradoxos da teoria dos conjuntos, conhecemos a teoria dos conjuntos e sua utilização como na Matemática.

**2.3 Avanço 3: O que é o indecidível de Gödel?**

O conceito de pesquisa ao qual nos afeiçoamos, nos termos de Joel Martins, é “ter uma interrogação e andar em torno dela em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões e outra vez...” (BICUDO, 1993, p. 18). Junto a essa compreensão de pesquisa, focamos nesta investigação, a qual estamos a apresentar, a proposição indecidível estabelecida por Gödel em sua prova da incompletude. A interrogação norteadora manifesta-se assim: o que é isto a proposição indecidível de Gödel?

Buscando passear pelo bosque da indecidibilidade para compreendermos sentidos e significados da sentença indecidível, estudaremos o TIG, a prova de Gödel, na qual ele constrói a proposição indecidível, buscaremos compreender o impacto da presença do indecidível na aritmética dos números naturais e a repercussão disso em teorias outras da Matemática.

Gödel prova em seu teorema da incompletude que, para a aritmética elementar pode-se exprimir no sistema uma proposição verdadeira e indemonstrável. Esta proposição além de ser verdadeira pode ser reconhecida por nós como verdadeira. Na prova da incompletude ilustrada em Nagel e Newman (1973)  essa passagem da prova, a nosso ver é bastante interesante pois permite que se acompanhe a construção da proposição verdadeira e pode-se também notar que ela não pode ser provada como tal. Assim, um conjunto finito de axiomas da aritmética elementar não pode ser consistente e completo, simultaneamente.

Buscaremos também compreender a repercussão da prova da existência de um conjunto não-vazio de proposições indecidíveis, no que se refere aos fundamentos do rigor em Matemática, uma vez que estudiosos do tema, tais como, Boaventura Souza Santos (SANTOS, 1988), por exemplo, entende que o TIG mostra que, mesmo seguindo à risca as regras da Lógica Matemática, é possível formular questões indecidíveis, inclusive, a que postula o caráter não contraditório do sistema. A ideia primordial de rigor em Matemática diz da aceitação de um resultado apenas e somente mediante a prova dele. Atualmente, podemos afirmar que uma teoria é rigorosa se ela é uma teoria formal e se os seus resultados são obtidos por meio das regras formais da Lógica Matemática. Gödel, procedendo rigorosamente, mostrou que não é possível conhecer (provar) tudo, na medida em que ele mostrou que existem questões na Matemática que não podem ser resolvidas pelo método formal. Esse é um dos pontos nevrálgicos que antevemos ser necessário tratar.

Nosso objetivo nessa investigação é compreender *o indecidível* na demonstração de Gödel e seus desdobramentos na Matemática, principalmente sua mensagem a qual acreditamos que pode regular expectativas exageradas do poder da Matemática em produzir e provar todas as suas verdades no âmbito de teorias, pois a presença do indecidível define a distinção entre verdade e demonstrabilidade, dado que o TIG sinaliza que a verdade não é ato particular do sistema, pois ele é incapaz de *provar* todas suas verdades, sugerindo assim que ele pode necessitar de sistemas vizinhos para efetuar essa prova.

Algumas referências entendemos ser *obrigatórias* para esse passeio a que nos propomos, a saber, Mostowski (1952); Tarski, Mostowski, Robinson (1953); Smullyan (1992) Hintikka (2000) e Haack (2002). Até este momento da pesquisa estamos focados no estudo do teorema da incompletude e buscando compreender a argumentação da prova realizada por Gödel.

## 2.4 Avanço 4: O TIG na Física

Tendo em mente que o TIG incide sobre sistemas formais e sendo a Matemática para a Física um modelo científico que serve como linguagem na formulação de suas teorías, podemos articular que este resultado da Matemática, por transitividade, atinge a Física também.

Podemos afirmar que o TIG repercute suas consequências para além da Matemática. Um pesquisador de história em sua tese, Lannes (2009), apresenta os impactos culturais do TIG no século XX na Matemática e para além dela. Este autor afirma que o teorema de Gödel impacta a Física, a Ciência da Computação, as Ciências Cognitivas e as Humanidades.

Até este momento tomamos contato com ideias iniciais e estamos conhecendo as repercussões do TIG especialmente na Física e na Ciência da Computação. O texto básico até aqui estudado é Lannes (2009). Planejamos tomá-lo como uma primeira aproximação do tema pelo viés histórico e posteriormente nos aproximaremos de textos específicos que nos sirvam de guias nessa seara conduzindo-nos às especificidades de nossa área. A pergunta diretriz dessa pesquisa é *Como o TIG impacta e repercute na Física?*

Prezamos por explicitar em detalhes a interrogação que nortea uma pesquisa, pois acreditamos que este esclarecimento pode ser, talvez, tão importante quanto a própria interrogação, dado que o movimento efetuado no clareamento do foco da pergunta e dos termos que enunciam a questão diretriz pode contribuir para a compreensão do leitor sobre o indagado, uma vez que nesse aclaramento pre-ocupamo-nos em apresentar o foco do que está sendo investigado buscando desviar de possíveis dúvidas que possam ser disparadas pelo enunciado. Desse modo, pomo-nos a esclarecer melhor o que nossa pergunta posta acima efetivamente interroga.

O *como* da interrogação anuncia que o TIG impacta e repercute sobre os conhecimentos desses campos de conhecimento, além disso, ele indica *modos* pelos quais este resultado exerce efeito sobre essa ciência e como ele ecoa sobre/no desenvolvimento dela. Nos termos de Klüber e Bicudo (2013)

> O ato de buscar pela estrutura do buscado é um modo de considerá-lo, em parte, desconhecido, mas já presente, ou seja, já há uma pré-compreensão daquilo que o pesquisador pretende compreender. E isso abre possibilidades para que o processo de produção do conhecimento se instaure. (KLUBER e BICUDO, 2013, p. 26).

Posto isso, faz-se necessário explicitar nossa compreensão até o momento sobre os primeiros passos que antevemos no movimento de pesquisa com enfoque qualitativo e fenomenológico. Na abordagem fenomenológica o pesquisador põe-se a compreender o fenômeno tendo em conta a experiência vivida sobre o fenômeno, sem lançar mão de técnicas ou teorias preestabelecidas.

No que tange à Física, buscaremos estudar a dependência que a Física tem em relação à Matemática para compreendermos o ponto de impacto do resultado da incompletude nessa ciência. Da mesma forma, ou seja, no movimento de pesquisa de dar voltas ao redor do fenômeno, qual seja, o impacto e a repercussão do TIG na Física, efetuaremos um estudo interpretativo buscando revelar o fenômeno conforme ele a nós for se mostrando no movimento de pesquisa.

Os principais trabalhos que acessamos e que vamos nos debruçar nos próximos passos da pesquisa são D’Alkaine (2006), Costa e Dória (1991), Davies (1992), Hawking (2002).

Trata-se de autores que podem nos dizer, sob suas perspectivas, sobre o impacto e a repercussão do TIG na Física.

**Considerações finais**

Nas linhas acima expusemos quatro perspectivas que temos percebido como lacunas solicitando investigação. Além disso trouxemos nossa postura de pesquisa em cada uma dessas frentes mostrando nossas compreensões e vistas dos primeiros movimentos de pesquisa que realizamos e estamos realizando ao redor dos fenômenos. Todas as quatro pesquisas estão em fase incial sendo desenvolvidas desde setembro de 2017.

Cada uma das pesquisas apresentadas são considerada por nós como avanços em perspectivas distintas que buscam suprir lacunas temáticas ao redor do tema principal de pesquisa, qual seja, o ensino do TIG em cursos de licenciatura em Matemática. Em nosso entender, elas se articulam com o tema central de investigação na medida em que cooperam aclarando os próximos passos que serão dados após a proposta de ensino do TIG apresentada em Batistela (2017) e avançam no sentido de terem objetivo de transcender o já realizado.

**REFERÊNCIAS**

BATISTELA, R. F. *O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática*. 2017, 140 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/148797/batistela_rf_dr_rcla.pdf?sequence=3>. Acesso em 04 mai. 2017.

BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V**.** The Importance of Teaching Gödel's Incompleteness Theorem in Mathematics Teacher Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, v. 33, p. 1-13, 2018.

BICUDO, M. A. V. (Org.). *Filosofia da Educação Matemática*: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

BICUDO, M. A. V. ; KLÜBER, T. E. A questão da pesquisa sob a atitude feneomenológica de investigação. Conjectura: Filosofia e Educacao, v. 18, p. 23-40, 2013.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa em Educação Matemática. *Pro-Posições,* v. 4, n. 1, p. 18-23, mar. 1993. Disponível em < http://www.ime.usp.br/~dpdias/2016/Pesquisa%20-%20Bicudo.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2016.

COSTA, N. C. A da; DORIA, F. A. Undecidability and Incompleteness in Classical Mechanics *International Journal of Theoretical Physics*, v. 30, n. 8, 1991, p. 1041-1073.

D'ALKAINE, C.V. Os trabalhos de Gödel e as denominadas ciências exatas. In: *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 4, p. 525-530, 2006.

DA SILVA, J. J. *Filosofias da Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

DAVIES, P**.** *Alguém governa o Universo?* Revista Superinteressante (mensal) Editora Abril, no. 57. Jun. 1992. Disponível em: http://super.abril.com.br/superarquivo/1992/conteudo_113063.shtml/

FEFERMAN, Solomon. The Impact of the Incompleteness Theorems on Mathematics. *Notices American Mathematical Society*, v. 53, n. 4, p. 434-439, 2006.

GÖDEL, Kurt. Acerca das Proposições Formalmente Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos. In: LOURENÇO, M. (Org.). *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 1977. p. 245-290.

HAACK, S. *Filosofia das Lógicas*. Tradução de C. A. Mortari e L. H. A. Dutra. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

HAWKING, S. *Gödel and the end of Physics*. July 20, 2002. <Disponível em: http://www.damtp.cam.ac.uk/strings02/dirac/hawking/.

HILBERT, David. Problemas matemáticos. *Revista Brasileira de História da Matemática.* Tradução de S. Nobre. v. 3, n. 5, p. 5 -12, 2003.

HINTIKKA, J. *On Gödel*. Boston: Wadsworth, 2000.

HUSSERL, Edmund. *Ideas relativas a una fenomenología pura y una filosofia fenomenológica*: investigaciones fenomenológicas sobre la constituición. Tradução de A. Zirión Q. 2. ed. México: Instituto de Investigaciones Filosóficas, 2005.

HUSSERL, Edmund. *Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica*: introdução geral à fenomenologia pura. Tradução de M. Suzuki. Aparecida: Ideias & Letras, 2006.

LANNES, Wagner. *A incompletude além da matemática: impactos culturais do teorema de Gödel no século XX*. 2009. 210 p. Tese (Doutorado em História) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

MOSTOWSKI, A. *Sentences Undecidable in Arithmetica Formalized*: An exposition of the theory of Kurt Gödel. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1952.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James, R. *Prova de Gödel*. Tradução de G. K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

SANTOS, Boaventura Sousa. *Um Discurso sobre as Ciências*. Porto: Edições Afrontamento, 1988.

SMULLYAN, R. *Gödel's Incompletness Theorems*. Oxford: Oxford Oxford University Press, 1992.

SNAPPER, Ernst. As Três Crises da Matemática: o Logicismo, o Intuicionismo, e o Formalismo. Tradução de J. P. de Carvalho. *Humanidades*, v. 2, n. 8, p. 85-93, jul/set. 1984.

TARSKI, A; MOSTOWSKI, A.; ROBINSON, R. M. *Undecidable Theories*: Studies in Logic and the Foundation ff Mathematics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1953.