CONFORME O DISPOSTO NA FICHA DE INSCRIÇÃO, EXPLICITE:

a) Filosofia
b) Bibliográfica
c) Trabalho a ser apresentado de acordo com:

- Área (escreva a área): Filosofia
- Tema/modalidade de pesquisa (escreva qual): Bibliográfica

CONTINUIDADE MATEMÁTICA: UM CONTEXTO HISTÓRICO

Bruno Henrique Labriola Misse

Unesp Rio Claro
brunohlmisse@gmail.com

Bruna Lammoglia

IFSP – Campus Salto
bruna@ifsp.edu.br

Resumo

O ato de pesquisar é dinâmico e por isso não há maneira única de se desenvolver uma pesquisa, porém há fatores que devem ser respeitados independentemente dos objetivos que se delineiem. Podemos citar a inquietação do pesquisador, a formulação de uma interrogação e a veracidade das informações apresentadas, como exemplos desses fatores. Contudo, entendemos que no desenvolver de uma pesquisa deve-se sempre levar em consideração o contexto histórico que envolve o objeto de pesquisa. Dedicamos este artigo a apresentar um contexto histórico realizado no bojo de uma pesquisa mais ampla sobre o contínuo matemático. O contexto apresentado remonta as primeiras questões postas sobre a continuidade com os antigos gregos e como foi se delineamento a formalização desse conceito pelos séculos seguintes. O último marco do nosso contexto se dá no início do século XX, com a crítica sobre a Análise Matemática feita por Hermann Weyl com base no conceito de continuidade. A elaboração de um contexto histórico pode abrir possibilidades de interpretação do objeto de pesquisa e lançar luz em caminhos a se percorrer. O contexto apresentado é um exemplo de como podemos realizar esse tipo trabalho em uma pesquisa.

Palavras-chave: Continuidade. Contexto Histórico. Pesquisa Qualitativa

Abstract

The act of searching is dynamic and this means there is no single model to be followed every research, but there are factors that must be respected regardless of the objectives that are outlined. We can quote as examples of

these factors the researcher's concern, the formulation of an interrogation and the veracity of the information presented. However, we understand that in the development of a research we must always consider the historical context that surrounds the research object. We dedicate this article to presenting a historical context carried out in the field of a broader research on the mathematical continuum. The presented context goes back to the first questions posed on the continuity with the ancient Greeks and how the formalization of this concept has been delineated for the following centuries. The last milestone of our context is in the early twentieth century, with the critique on Mathematical Analysis made by Hermann Weyl based on the concept of continuity. The elaboration of a historical context can open possibilities of interpretation of the investigation's objetct and shed light on ways to go. The context presented is an example of how we can accomplish this kind of work in a survey.
Keywords: Continuity. Historical Context. Qualitative Reaserch.

Introdução

A Matemática é uma ciência milenar cuja origem se confunde com própria origem da vida humana. E embora seja significativa a sua evolução por tudo o que já se foi demonstrado e consolidado, ainda há questões em aberto que motivam e desafiam pesquisadores a produzirem novos conhecimentos. Podemos dizer que essa perspectiva de a Matemática estar sempre aberta e em constante *construção*[1]faz dela uma área de pesquisa quase inesgotável.

Os avanços matemáticos que ocorreram a partir do século XIX são repletos de simbolismo algébrico e se distanciam de uma compreensão intuitiva pela falta de semelhanças com o mundo físico. Contudo, para que compreendamos esse conhecimento abstrato produzido por aqueles que se aventuraram pelos meandros da Matemática, principalmente no último século, ainda se faz necessária a compreensão de elementos intuitivos, como medida, continuidade, ordenação, grandeza e tantos outros.

Entendemos que a compreensão desses elementos intuitivos está sempre presente na produção de conhecimento matemático, e para buscar tal compreensão é necessário que assumamos uma postura filosófica procurando pelos desdobramentos dos conceitos em diversas perspectivas. Para isso, dentre as possibilidades que se mostram no ato de investigar filosoficamente, acreditamos que devemos sempre olhar para o panorama histórico que cerca nosso objeto de pesquisa.

Segundo Bicudo (2011, p. 23-24) qualquer que seja o objeto, o objetivo e a modalidade de uma pesquisa, ela envolve uma interrogação, que é entendida por essa autora como expressão da "perplexidade do investigador diante do mundo, a qual se manifesta inclusive como força que o mantém alerta, buscando e inquerindo, não se conformando com respostas quaisquer". Desse modo é a interrogação que norteia o pesquisador, uma vez que é ela que irá orientá-lo,

[1] O termo construção é usado aqui em sentido amplo fazendo alusão ao processo de desenvolvimento do edifício da Matemática. Não temos a intenção de assumir uma postura construtivista sobre o conhecimento matemático.

lançando luz ao objeto de pesquisa, estabelecendo uma relação daquele que busca conhecer com aquilo que se doa ao conhecimento.

Concordamos com a autora que a complexa relação da interrogação com o interrogado e aquele que interroga não deve ser menosprezada, uma vez que a pesquisa, os sujeitos e o investigador estão em constante movimento no fluxo temporal e por isso tal relação é dinâmica e repleta de história. Portanto, entendemos que na constituição do trajeto de uma pesquisa deve estar presente a história tanto do pesquisador quanto daquilo que é pesquisado e também a própria história do desenvolvimento da pesquisa.

Neste artigo apresentaremos o levantamento bibliográfico realizado no âmbito de uma pesquisa mais ampla sobre a continuidade matemática. O conteúdo que será exposto constitui o panorama histórico desse objeto matemático e as considerações sobre o período que cada marco se insere.

A pesquisa foi realizada em livros de História da Matemática, em teses defendidas sobre o tema continuidade e em livros de Matemática que abordam esse tema e suas diferentes perspectivas.

A pesquisa em desenvolvimento – um contexto histórico do conceito de continuidade em Matemática

Historicamente, é possível ver que a discussão sobre a continuidade repousa, em um primeiro momento, sobre os antigos gregos. Embora os problemas sobre o infinito e a continuidade estejam intimamente ligados na antiguidade clássica, e a filosofia grega tenha se dedicado a discussão do assunto, em nossa pesquisa iremos destacar os elementos que mais contribuíram para a constituição da continuidade nos dias de hoje.

Foi a necessidade de justificativas para processos que podem ser repetidos indefinidamente, a precursora da pesquisa sobre a continuidade. Objetivava-se um modo de fazer com que essas repetições se tornassem demonstrações de propriedades matemáticas.

De modo destacado está o *método de exaustão*[2] cujo desenvolvimento se atribui a Eudoxo (408 – 355 a.C), que é uma formalização de um processo de repetição infinita que estava sendo questionado por alguns matemáticos da época.

---

[2] O método de exaustão admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se

Eves (2004) afirma que, possivelmente, esse método tenha sido uma resposta da escola Platônica para os paradoxos de Zenão (c. 450 a.C.), que apresentavam dificuldades lógicas para explicar o movimento, caso fosse aceito o processo de divisões sucessivas de uma distância *ad infinitum*.

Em Sbardellini (2005) é possível ver que, contemporaneamente ao método de exaustão, outros filósofos e matemáticos abordavam as problemáticas de variações contínuas e da existência de um elemento fundamental, formulando a doutrina *atomística*, cujo maior representante é Demócrito (460 – 370 a.C). Esse filósofo, além conseguir determinar algumas fórmulas para volumes de pirâmides, questiona a igualdade das infinitas seções circulares paralelas de um cone.

A questão posta pela filosofia atomista diz que se essas seções fossem iguais, então o sólido que elas formariam seria um cilindro e não um cone. Contudo, se fossem diferentes, então estaríamos diante de um sólido com degraus. “Outros problemas matemáticos de natureza infinitesimal são imputados a Demócrito, o que o credencia, historicamente, como o primeiro a perseguir essa noção” (Sbardellini, 2005. p. 17).

Destacamos aqui que ao realizarmos esse levantamento bibliográfico se mostrou importante consultar autores distintos que apresentassem perspectivas sobre um determinado fato histórico, para possibilitar diferentes interpretações sobre os desdobramentos de um acontecimento.

Quando buscamos compreender o contexto histórico de um objeto percebemos que há conexões entre fatos ocorridos mesmo havendo séculos de distância entre eles. Por exemplo, podemos citar que tanto o método de Eudoxo, quanto os problemas de Demócrito foram rediscutidos na Idade Moderna, período que remonta ao século XVII, quando matemáticos como Cavalieri[3], Kepler[4] e Leibniz[5] se debruçam sobre problemas de continuidade e infinito.

---

também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2004. p. 419)

[3]Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), de origem italiana foi aluno de Galileu e atuou como professor de matemática da Universidade de Bolonha. Seus trabalhos estão ligados a Matemática, Ótica e Astronomia, sua grande contribuição à Matemática é o tratado *Geometria indivisibilibus,* no qual ele apresenta seu método dos indivisíveis (EVES, 2004. p. 425).

[4] Johann Kepler (1571 – 1630), de origem alemã, foi aluno e sucessor de TychoBrahe, seus trabalhos estão ligados à astronomia, e principalmente, ao problema do movimento dos planetas em torno do Sol (EVES, 2004. p. 356).

[5] Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716), de origem alemã, foi um matemático que atuou em diversas áreas e divide o título de fundador do Cálculo Diferencial e Integral com Newton (EVES, 2004, p. 442).

Segundo Silva (2007) além de outras mudanças que marcam uma revolução na Matemática nesse período destaca-se a "inusitada disposição dos matemáticos para se envolverem com o infinito sob diversas formas" (SILVA, 2007. p. 77).

O trabalho com métodos infinitários realizado por diversos cientistas da época e o desenvolvimento posterior do Cálculo Infinitesimal, efetuado por Leibniz e Newton[6], abre novos questionamentos sobre o contínuo e o infinito. E, do mesmo modo que Zenão apresentou paradoxos sobre os métodos gregos, os matemáticos do século XVII foram criticados pelo caráter vago e pouco rigoroso de seus métodos, cuja fundamentação rigorosa só é possível, conforme SILVA (2007) no século XIX, com Weierstrass[7], Dedekind[8] e Cantor[9].

Além dos nomes que citamos acima, é notório no século das revoluções, o XVII, a aplicação da Álgebra no tratamento de alguns problemas da Geometria e a disposição para a discussão sobre o infinito. Os eventos desse século levaram Torricelli[10] a descobrir um sólido ilimitado, portanto, infinito, que tem volume finito (HERRERA, 2012)[11], e essa descoberta abalou a estrutura aparentemente sólida do simbolismo que regia a Matemática nesse século.

Silva (2007) aponta que a descoberta de Torricelli não abalou apenas a Matemática, mas também a Filosofia, afirmando que: "o que é contraditório para as grandezas finitas pode ser da própria essência das grandezas infinitas; o que repugna a nossa intuição finita pode ser a verdade do infinito" (2007. p. 84).

Ao longo da história podemos observar que a natureza contra intuitiva do infinito perturbou o pensamento de vários matemáticos, de modo que muitas outras questões concernentes ao

---

[6] Sir Isacc Newton (1642 – 1727), de origem inglesa, foi um cientista renomado em diversas áreas e divide o título de fundador do Cálculo Diferencial e Integral com Leibniz (EVES, 2004, p. 437).

[7] Karl T. W. Weierstrass (1815 – 1897), de origem alemã, trabalhou muitos anos como professor antes de se dedicar a pesquisa em matemática avançada, "tornando-se provavelmente o maior professor de matemática avançada que o mundo já teve" (EVES, 2004. p. 611).

[8] Julius W. R. Dedekind (1831 – 1916), de origem alemã, atuou na Universidade Göttingen, seus trabalhos estão associados à fundamentação dos Números Reais pelo método dos cortes, que em sua homenagem, recebem o nome de cortes de Dedekind (EVES, 2004. p. 608).

[9] George F. L. P. Cantor (1845 – 1916), de origem russa, desenvolveu pesquisas na área de Filosofia, Física e Matemática. Mostrou profundo interesse pela teologia medieval e seus argumentos intrincados sobre o contínuo e o infinito. (EVES, 2004. p. 615)

[10] Evangelista Torricelli (1608 – 1647), de origem italiana, foi aluno de Galileu e seu trabalho está relacionado à Física, à teoria de projéteis e ao movimento dos fluídos. Em Matemática, sua contribuição foi o uso de infinitesimais na Geometria. (EVES, 2004. p. 396)

[11] Nesse trabalho podemos encontrar a demonstração feita por Torricelli sobre a finitude do volume do sólido, a autora do artigo busca elucidar os estilos de demonstrações matemáticas do século XVII e toma o trabalho desenvolvido por Torricelli como exemplo.

infinito são levantadas nessa época, mas só serão respondidas mais tarde, depois de uma revolução na Filosofia da Matemática que teve início com Kant[12] e Leibniz.

Entendemos que há uma estreita relação entre o infinito e o contínuo de modo que a busca por compreensões sobre o infinito repousa na compreensão da continuidade e em seus modos de ser. Assim, um estudo sobre a continuidade não pode se restringir apenas ao âmbito matemático buscando apenas diferentes definições e estruturas que já foram dadas ao contínuo, mas solicita a busca pela compreensão da característica de um ente matemático. E, para essa jornada devemos nos distanciar criticamente da Matemática e nos colocarmos em posição de estranhamento, estamos entrando nos meandro da Filosofia da Matemática.

No âmbito da Filosofia da Matemática, Leibniz aparece como representante do espírito lógico-analítico, abrindo espaço para uma nova perspectiva da Matemática, regida pelo rigor lógico e pelos métodos infinitários. Seu trabalho e os de Weierstrass e Hilbert[13] são o ponto de partida para discutir os fundamentos da aritmética e o conceito de verdade (SILVA, 2007).

Segundo Piauí (2010), o contínuo é tratado na Filosofia Leibniziana como sendo um dos labirintos da razão.

> Existem dois famosos labirintos onde nossa razão se perde muitas vezes; um diz respeito à grande questão do livre e do necessário, sobretudo quanto à produção e quanto a origem do mal; o outro consiste na discussão da continuidade (continuité) [ou do continuum] e dos indivisíveis que constituem seus elementos, e no qual deve entrar a consideração do infinito. O primeiro embaraça praticamente todo o gênero humano, o outro influencia somente os filósofos. (LEIBNIZ, 1969, p. 29 apud PIAUÍ, 2010. p. 17).

Entendemos que Leibniz, como outros autores, considera a ideia de contínuo como uma questão que deve ser cuidadosamente estudada, e que pode levar a ambiguidades lógicas, uma vez que, seguindo o exposto pelos autores acima, nossa intuição finita estranha as possibilidades de ser do infinito.

Um estudo aprofundado sobre a filosofia de Leibniz foge ao escopo deste artigo, mas devido a sua importância na produção de conhecimento sobre a continuidade apontamos, de modo resumido, que existem duas faces do labirinto do contínuo e que por isso devemos nos ater a

---

[12] Emmanuel Kant (1724 – 1729) filósofo alemão fundador do Idealismo Transcendental está associado à Filosofia Foral.

[13] David Hilbert (1862 – 1943), de origem alemã, é um dos maiores matemáticos de todos os tempos, seus trabalhos visam à fundamentação da Matemática, trabalhando com teoria dos números algébricos, fundamentos de Geometria, cálculo de variações, entre outros. (EVES, 2004. p. 684)

duas estruturas: uma diz da composição do contínuo e a outra sobre sua completude. Segundo Piauí (2010) com relação à composição do contínuo, Leibniz recorre ao conceito de Mônada[14], como sendo a partícula última e constituinte do todo. E, quanto à completude, Leibniz faz uma discussão sobre o tempo, o espaço e o corpo, cujo propósito é contrapor esses conceitos com os defendidos por Descartes e Newton, argumentando que há uma incompreensão nas teorias desses autores, tendo como fator principal a estrutura do contínuo.

Muitas das teorias de Leibniz foram ganhando relevância com o passar do tempo, de modo que podemos dizer que suas contribuições para as Ciências não foram imediatas, mas suas ideias geraram frutos importantes para o desenvolvimento de novas perspectivas, principalmente para os matemáticos do século XIX.

O final do Século XIX é marcado por uma série de contestações quanto à veracidade e aos fundamentos da Matemática. Historicamente esse período é chamado de “A Crise dos Fundamentos”, que tem como marco temporal a Teoria dos Conjuntos de Cantor que é vista como precursora desses questionamentos.

Segundo Silva (2007, p. 13) a teoria de Cantor surge “da necessidade de um tratamento adequado do contínuo aritmético, mas tornou-se logo uma teoria de totalidades infinitas consideradas abstratamente”. Cantor, juntamente com Dedekind, ao estudar problemas de sequências infinitas percebeu que a estrutura dos números reais era pouco conhecida, e que para a sua compreensão era necessário uma discussão sobre o contínuo.

Dentre as pesquisas realizadas à época foi formulada a *hipótese do contínuo* de Cantor que supõe que a quantidade de números reais é a menor quantidade infinita maior que a infinidade dos números inteiros positivos. Essa hipótese levanta dúvidas jamais imaginadas em Matemática, uma vez que Cantor afirma que existem vários infinitos, os *infinitos transfinitos*, que podiam ser tratados matematicamente, e um *infinito absoluto* sempre maior que qualquer outro infinito. A busca de Cantor é encontrar o número que corresponda à menor quantidade que fosse maior que a infinidade dos números naturais, inteiros e racionais (esses todos possuem a mesma cardinalidade), pois acredita que esse número corresponderia à quantidade do contínuo aritmético.

[14]No Leibnizianismo, átomo inextenso com atividade espiritual, componente básico de toda e qualquer realidade física ou anímica, e que apresenta as características de imaterialidade, indivisibilidade e eternidade. (HOUAISS, 2007)

Seus esforços e de outros matemáticos, notadamente Hilbert, em busca desse número ou para a demonstração de sua existência não foram recompensados. Somente no século XX, muitos anos após sua formulação, foi demonstrada que a *Hipótese do Contínuo* não pode ser verificada por meios matemáticos.

Silva (2007) apresenta o desfecho da saga da hipótese do contínuo, dizendo que, mesmo com os avanços matemáticos oriundos dos trabalhos de Hilbert e Gödel[15], no que diz respeito à formalização da Matemática por meios axiomáticos, em 1963 Cohen[16] mostrou que mesmo a teoria dos conjuntos "é incapaz de demonstrar a *verdade* da hipótese do contínuo, a menos que essa teoria seja inconsistente, o que seria um desastre ainda maior" (SILVA, 2007. p. 116).

A discussão sobre o contínuo é retomada por Weyl em seu livro lançado em 1918, *Das Kontinuum*[17]. Silva (2007. p. 180), ao discutir essa obra aponta que o autor se dedica a um dos "mais intrigantes problemas matemáticos de todos os tempos, o contínuo precisamente", afirma ainda que o Weyl reconhece que os muitos paradoxos apresentados no decorrer da história são quebra-cabeças gerados pelo contínuo.

Precisamos destacar que os trabalhos de Weyl ainda são influenciados pelo espírito da crise dos fundamentos, mas num momento no qual os matemáticos se dedicam a busca por novas perspectivas para formalização de conceitos. Ocupam papel de destaque nessa época os trabalhos de Hilbert, Einstein, Gödel e Husserl.

Aluno de Hilbert e de Husserl[18], Weyl faz críticas aos fundamentos da Matemática como seus mestres e, em sua obra, segue a linha de pensamento apresentada por Husserl em seminário ministrado em Göttingen nos anos de 1904 e 1905 "sobre a constituição intencional do *fluxo contínuo* do tempo da experiência vivida".

Weyl se vale das ideias apresentadas por Husserl sobre o fluxo do tempo para dizer do contínuo aritmético dos números reais, dizendo que, do mesmo modo que os instantes

---

[15] Kurt Gödel (1906 – 1978), de origem austríaca, dedicou-se ao estudo dos fundamentos da lógica e da Matemática, e seu trabalho mais conhecido é o Teorema da Incompletude.

[16] Paul J. Cohen, nascido em 1934, debruçou-se sobre a hipótese do contínuo provando que ela "é independente dos postulados da teoria dos conjuntos e, portanto, não pode ser deduzida a partir desses postulados" (EVES, 2004. p 666)

[17] Dispomos da versão traduzida por Stephen Polllard e Tomas Bole (Weyl, 1994)

[18] Edumund G. A. Husserl (1859 – 1938), de origem alemã, foi um matemático e filósofo que estabeleceu a Fenomenologia como corrente filosófica. Em Matemática, seus trabalhos estão ligados à Filosofia da Matemática e aos fundamentos da Ciência Matemática.

temporais não existem na experiência, mas são antes idealizações, os números reais denotam a mesma situação limite para a continuidade aritmética.

Finalizando nosso contexto histórico, é esse o último grande marco na história da produção de conhecimento matemático sobre o contínuo e a continuidade, até os dias de hoje.

Considerações

Apresentamos neste artigo um contexto histórico sobre a continuidade, abarcando os fatos importantes que marcaram o desenvolvimento desse conceito e algumas interpretações que podemos fazer ao buscar por desdobramentos de tais fatos. Entendemos que esse movimento é importante na constituição de uma pesquisa, uma vez que qualquer objeto de investigação está imerso em história, a qual não deve ser desprezada.

Justificamos a importância de se conhecer a história de um conceito matemático, pois nesse movimento é possível compreender quais os elementos intuitivos que possibilitaram a formalização que é praticada nos dias de hoje.

Entendemos, ainda, que a busca e constituição de um contexto histórico no desenvolvimento de uma pesquisa possibilita o encadeamento de ideias do pesquisador em conjunto com aquelas dos autores pesquisados, fazendo com que a investigação ganhe sentido à medida que aquilo que é pesquisado vai sendo mais bem compreendido.

No caso do exposto neste artigo, um contexto histórico sobre a continuidade, nós percebemos que embora esse tema tenha sido alvo de discussões desde os gregos antigos ainda permanecem questões em aberto. Compreendemos, também, sobre como diferentes posturas filosóficas, que implicam em mudanças conceituais, alteram as compreensões sobre esse tema. Vemos avanços teóricos consideráveis desde as questões atomistas e uma formalização muito mais precisa do que aquela apresentada pelos matemáticos do século XVII, mas ainda nos assolam dúvidas quanto à constituição do contínuo como ente matemático, ou se é possível encontrar a cardinalidade do contínuo, como defendia Cantor.

Enfim, as questões postas e tantas outras que se apresentam quando entramos nos meandros da continuidade matemática fazem parte de nossa pesquisa maior sobre esse tema, que será apresentada futuramente para a comunidade científica.

REFERÊNCIAS

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

HERRERA, R. M. Histórias de Matemáticas: El sólido hiperbólico agudo. In: **Pensamiento Matemático**. n. 2, p. 1-11, abr. 2012. Disponível em: <http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3891846.pdf> Acesso em: 08 fev. 2018

LEIBNIZ, G. W. **Discurso de metafísica e outros textos**. Trad. Marilena Chauí e Carlos Lopes de Mattos. São Paulo: Abril Cultural, 1983, 237 P. (Col. Os pensadores)

PIAUÍ, W. S. Leibniz e as Duas Faces do Labirinto do Contínuo: uma introdução. **Argumentos**, ano2, n. 3, p. 16-24. 2010. Disponível em: <http://www.periodicos.ufc.br/index.php/argumentos/article/viewFile/200/200>. Acesso em 01 fev 2018.

SBARDELLINI, L. A. **O CONTINUUM, OS REAIS E CONCEITO DE HOMOGEINIDADE.** Tese (Doutorado em Filosofia), Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

SILVA, J. J. **Filosofia da Matemática**. São Paulo: Editora Unesp, 2007.

WEYL, H. **The Continuum:** A critical examination of the fundation of Analysis. Mineola/N.Y. – EUA. Dover Publications, 1994.