UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

PAVIMENTAÇÕES DO PLANO: UM ESTUDO COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA E ARTE

Marli Regina dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Murari

Co-orientadora: Profª. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosóficos e Científicos, para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2006

COMISSÃO EXAMINADORA

PROF. DR. CLAUDEMIR MURARI (ORIENTADOR)

PROFA. DRA. MARIA APARECIDA VIGGIANI BICUDO (CO-ORIENTADORA)

PROF. DR. ADLAI RALPH DETONI

PROF. DR. GERALDO PEREZ

ALUNA: MARLI REGINA DOS SANTOS

Rio Claro, 10 de outubro de 2006.

Resultado: ____

A José e Zenaide

AGRADECIMENTOS

Ao professor Claudemir Murari, principalmente, pelo apoio e disposição na concretização do curso com os professores-alunos, proporcionando a *segurança* necessária durante a realização dos encontros com eles.

À professora Maria Bicudo, por nos mostrar um *caminho* e por participar, atenciosamente, da caminhada.

Ao professor Geraldo Perez, em especial pela atenção com que me recebeu nesse programa de pós-graduação.

À professora Miriam, pelas preciosas sugestões, durante todo meu mestrado.

Ao professor Adlai, pelas relevantes contribuições para a conclusão deste trabalho.

À professora Maria Queiroga.

À Lenis Murari, pelas valiosas modificações sugeridas.

Aos atores principais deste trabalho: os professores de Matemática e Arte que participaram dos encontros que realizamos. Muito obrigada pelos valiosos momentos em que pudemos *com-viver*.

Aos grupos de estudo deste programa dos quais participei, e que muito colaboraram com esse trabalho: Grupo sobre Formação de Professores, Grupo sobre Resolução de Problemas e Grupo de Fenomenologia.

Àqueles professores e funcionários da UNESP de Rio Claro que tive a honra de conhecer.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, por me conceder a Bolsa Mestrado.

Agradeço imensamente a todos que participaram, de alguma forma, da realização deste trabalho. Não me atrevo a citar seus nomes para não correr o risco de, futuramente, saber que a minha memória me traiu.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS E QUADROS

RESUMO

Nesta pesquisa, investigamos *“Quais significados os professores de Matemática e de Arte atribuem ao trabalho com pavimentações do plano, envolvendo material manipulativo, em situação de ensino e aprendizagem de geometria?”*, em um curso de geometria. As atividades desenvolvidas nos encontros realizados com os professores-alunos de Matemática e Arte tiveram como pano de fundo o tema *pavimentações do plano* e estavam associadas a materiais didáticos manipuláveis. Foi apresentado um estudo referente aos conceitos e propriedades geométricas concernentes: às pavimentações uniformes, à visualização em caleidoscópios, aos tetraminós e às pavimentações de Penrose. Os encontros foram filmados, transcritos e analisados sob a perspectiva da análise fenomenológica. As análises e interpretações efetuadas permitiram identificar *cenas* que se mostraram *significativas*, as quais, mediante desdobramentos dos estudos interpretativos e efetuando as reduções sucessivas, levaram-nos a três categorias abertas: a primeira, *construindo interdisciplinaridade – aproximações e afastamentos*, aborda os significados que surgiram nesse contexto multidisciplinar, e que avançam em direção à interdisciplinaridade, revelando disposições para as trocas possíveis. A segunda, *a prática pedagógica dos professores-alunos*, enfoca os significados que explicitam a presença de educadores que trazem consigo suas vivências da prática docente, a percepção que têm de seus alunos e suas expectativas em relação aos encontros. Por fim, *construção de conhecimento* trata das construções, desconstruções e reconstruções que ocorrem no ambiente dos encontros, em meio a uma atitude empática, evidenciando os humores e disposições dos professores-alunos para ampliarem seus *horizontes de possibilidades*. A análise dessas categorias permitiu a elaboração de uma síntese, na qual apresentamos considerações quanto ao uso de materiais manipuláveis, à prática docente e à interdisciplinaridade da Educação Matemática.

Palavras-chave: geometria, pavimentação, matemática, arte, fenomenologia.

ABSTRACT

In this study, we investigate *"Which meanings the teachers of Mathematic and Art attribute to the work with tilling of the plan, with manipulative material, in teaching and learning of geometry?"*, in a geometry course. The activities developed in the encounters had as backdrop the theme *tilling of the plan* and were associated to didactic manipulative materials. A study was presented regarding the concepts and geometric properties, concerning: to the uniform tilling, to the visualization in kaleidoscopes, to the tetraminos and the tillings of Penrose. The encounters were filmed, transcribed and analyzed under the perspective of phenomenological analysis. The analyses and interpretations realized allowed to identify *meaning scenes*, the ones which, by the development of the interpretative studies and trough the successive reductions, took us to three open categories: the first, *building interdisciplinarity - approaches and retrieves*, analyses the meanings that appeared in that multidisciplinar context, and that move towards the interdisciplinarity, revealing dispositions for the possible changes. The second, *the teacher-students pedagogic practice*, focuses the meanings that shows the educators presence that bring their existence in the educational practice, the perception that have of their students and their expectations relative to the encounters. Finally, *knowledge construction* treats of the constructions, deconstructions and reconstructions that happen in the atmosphere of the encounters, trough an empathically attitude, evidencing the humors and dispositions for them to enlarge their horizons of possibilities. The analysis of these categories allowed the elaboration of a synthesis, in which we present considerations related to the use of manipulable materials, the practical of the professor and the interdisciplinarity of Mathematical Education

Key-words: geometry, tilling, mathematics, art, phenomenology.

INTRODUÇÃO

Trajetória Pessoal e Constituição do Problema

Ao lermos as pesquisas sobre a trajetória inicial do professor de Matemática em sua prática, nos sentíamos protagonista principal desses estudos. Foram diversos os obstáculos que encontramos ao ingressarmos na carreira do magistério, como a falta de métodos e de didática para ensinar, dificuldades na preparação das aulas e problemas no relacionamento com os alunos, que eram muito diferentes daqueles que idealizáramos. Esses e outros motivos estimulavam a possibilidade de desistirmos dessa profissão. Sentíamos que os quatro anos da Licenciatura em Matemática não haviam nos dado uma “receita” para resolvermos as complexas situações geradas no ambiente escolar.

Víamos a Matemática como uma disciplina inquestionável, que deveria ser apresentada ao aluno o mais formalmente possível. Essa postura, diante do ensino dessa disciplina, fazia com que escolhêssemos os livros didáticos mais tradicionais para lecionarmos, já que, em nossa concepção, eles apresentavam o conteúdo da forma que considerávamos correta: pronto e objetivo. Mas, as dificuldades apresentadas pelos alunos com relação à aprendizagem dos conceitos matemáticos causavam-nos desconfortos, mesmo que fosse possível justificar tais dificuldades por meio de afirmações do tipo: “Ele não tem aptidão para a Matemática”.

Em sala de aula, chamava-nos a atenção a dificuldade dos alunos para compreender a geometria. Considerávamos que os conteúdos geométricos, devido ao seu caráter intuitivo, deveriam ser facilmente compreendidos, porém constatávamos que a maioria de nossos alunos apenas decorava propriedades e conceitos, que, provavelmente, seriam esquecidos logo em seguida. Isso nos levou a perceber nossas deficiências para ensinar geometria.

Refletindo sobre a época em que éramos aluna, recordamo-nos da dificuldade em entender “quem” era a área de um retângulo. Sabíamos multiplicar a medida da base pela da altura para encontrá-la, mas “quem” era a área diante daqueles quatro risquinhos? Constatamos que estávamos fazendo o mesmo com nossos alunos: exigindo que eles decorassem regras e as aplicassem numa série de exercícios, mesmo que isso não tivesse nenhum significado para eles.

A geometria axiomática que estudamos na Licenciatura era extremamente formal e não nos habilitava a apresentar algo mais significativo para os alunos das séries do Ensino Fundamental, nível em que lecionávamos.

No entanto, nossas inquietações e questionamentos quanto às dificuldades dos alunos em aprender geometria – bem como as nossas dificuldades para ensiná-la – impulsionaram-nos a buscar respostas que, de alguma forma, colaborassem com nossa prática. Sentíamos necessidade de não nos acomodarmos diante de tal situação, já que acreditávamos que uma base sólida de conhecimentos em geometria traria sucesso ao aluno em seus estudos posteriores, tanto na Matemática como em outras áreas.

Após lecionarmos alguns anos como professora substituta, efetivamo-nos na rede pública municipal de ensino da cidade de Araraquara. Contudo, o "problema" do ensino de geometria persistia. Nas conversas com outros professores e pesquisando em livros didáticos e paradidáticos, emergiu a possibilidade de desenvolver atividades utilizando recorte, manipulação e montagem e, dessa forma, promover a participação do aluno. Com efeito, ao incorporar à nossa prática esses novos recursos, notamos que, por meio da manipulação e observação dos objetos, os estudantes faziam conjecturas e participavam com mais empenho da formalização das propriedades geométricas relacionadas. Observamos que a maioria dos alunos se entusiasmava com a aula e que alunos considerados "fracos" se interessavam pela geometria, encontrando soluções para os problemas propostos, muitas vezes, mais rapidamente que os outros. Notamos que o ensino associado à manipulação de instrumentos de medida e outros materiais poderia trazer bons resultados, ao menos quanto à participação e ao interesse no desenvolvimento das atividades em sala de aula.

Passamos a dar especial atenção às falas dos alunos. Questioná-los nos auxiliava na busca de formas mais significativas para ensinar os conteúdos matemáticos.

Notávamos, ainda, que outros professores tinham, como nós, dificuldades para abordar a geometria. Nos planejamentos escolares, junto aos nossos colegas da mesma área, a atenção dada ao tema era irrisória. Não se discutia sobre o ensino desse conteúdo e sobre o uso de materiais ou recursos diversificados, como, por exemplo, a informática, já que nossa escola possuía um amplo laboratório. A ausência dessas discussões impossibilitava reflexões coletivas sobre a geometria e sua importância no currículo das séries do Ensino Básico.

Considerávamos que seria muito enriquecedor se houvesse um momento em que nós, professores de Matemática, nos reuníssemos para discutir propostas, trocar sugestões e expor nossas experiências em sala de aula. Entretanto, o número excessivo de aulas e a falta de tempo faziam com que nosso trabalho se tornasse solitário.

Foram poucos os momentos de trocas com nossos colegas, da mesma área ou não, porém foram muito importantes para o nosso crescimento profissional e pessoal, pois nos encorajaram a explorar outros caminhos e a apostar em novas possibilidades, inspirados nas experiências positivas de professores que, ao se “arriscarem” na realização de aulas não tradicionais, obtiveram resultados satisfatórios.

Esses momentos coletivos influenciaram nosso desenvolvimento profissional de forma muito positiva. Passamos a conceber o ambiente escolar como um local propício às interações das vivências e à transformação de nossas crenças e concepções sobre ensino e aprendizagem.

Assim, a partir de nossa vivência no ambiente escolar junto à diversidade de olhares sobre a Matemática e, mais especificamente, sobre a geometria - o olhar do aluno, o do professor tradicional, o do professor inovador, o dos livros, o da licenciatura, o das capacitações e, também, nosso olhar - iniciou-se a constituição deste estudo. Direcionamos nossa atenção para a elaboração de um projeto de Mestrado voltado para o ensino de geometria, abordando-o por meio do uso de materiais manipuláveis em atividades que envolvessem a participação do aprendiz e buscassem colaborar, de alguma forma, com a sua aprendizagem.

Ao ingressarmos no Mestrado, constatamos que as dificuldades encontradas pelo professor para ensinar geometria havia sido analisada por diversos pesquisadores em Educação Matemática (PEREZ 1991; PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995; GAZIRE, 2000). Nessa fase inicial, nossas idéias não eram muito claras quanto ao foco de nosso estudo. Assim, após alguns estudos preliminares, reformulamos nosso projeto, sob orientação. Discutimos com o orientador dessa pesquisa as possibilidades de desenvolvimento da pesquisa junto a um grupo de professores de quinta a oitava séries do Ensino Fundamental, considerando que, a partir de uma revisão bibliográfica, averiguamos haverem poucos estudos abordando a geometria na formação continuada de professores dessas séries.

Apreciamos a possibilidade de desenvolvermos tal pesquisa, pois poderíamos apresentar e discutir junto aos nossos colegas uma abordagem alternativa à tradicional para o ensino de geometria. Vislumbramos a possibilidade de criação de um ambiente que proporcionasse momentos de reflexão no qual pudéssemos compartilhar experiências. Não tínhamos a pretensão de apresentar uma solução para os problemas relacionados ao ensino de dessa matéria, mas acreditávamos que os diálogos e as interações poderiam apontar caminhos para melhorias da prática docente.

A questão que ora se apresentava era como seria possível contribuir com os professores, no que se refere à construção de conhecimentos geométricos e à utilização de recursos alternativos ao "giz e lousa" no ensino de geometria.

Nosso orientador sugeriu o tema *tesselações*[1] *do plano* como pano de fundo para a elaboração das atividades a serem desenvolvidas nos encontros com os professores-alunos, já que muitos e variados conceitos geométricos poderiam ser abordados. Além disso, diversos autores obtiveram resultados positivos ao trabalhar esse tema em atividades com alunos do Ensino Básico, apontando ser possível o desenvolvimento de diversas habilidades por meio do estudo das pavimentações (BARBOSA, 1995; MURARI, 1999; ALMEIDA, 2003; MARTINS, 2003; SILVA, 1997; entre outros).

Determinado o tema, partimos para a elaboração das atividades que seriam desenvolvidas nos encontros com os professores-alunos. Nesse momento, emergiram questões importantes a serem consideradas, como: Quais aspectos do pensamento geométrico seriam privilegiados, considerando que os sujeitos lecionavam de quinta a oitava séries? Qual seria o "papel" do material manipulável no desenvolvimento das atividades?

A fim de circunscrever nosso estudo, enfocamos os conteúdos de geometria sugeridos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), para as séries consideradas, por meio da investigação das idéias geométricas envolvidas no estudo:

- das pavimentações por polígonos regulares;
- da visualização de pavimentações em caleidoscópios;
- das pavimentações por tetraminós;
- das pavimentações aperiódicas de Penrose.

A partir dessa delimitação, elaboramos as atividades e iniciamos a preparação dos encontros, nos quais os professores-alunos receberiam textos sobre as pavimentações e materiais manipuláveis, que seriam utilizados no desenvolvimento das atividades.

Até aqui, a questão diretriz de nosso estudo assim se expressava:

"Como uma proposta para o ensino de geometria, utilizando recreações geométricas em tesselações, pode colaborar com o professor no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo?"

O termo recreações foi utilizado devido ao caráter lúdico das atividades e do material manipulativo a elas associado.

Durante o processo de elaboração das atividades e confecção do material, evidenciava-se a existência de uma íntima relação entre a geometria das pavimentações e a Arte. Nas

[1] Pavimentações ou mosaicos

leituras realizadas, observamos a possibilidade de desenvolvimento de trabalhos interdisciplinares envolvendo Matemática e Arte, por meio do estudo de cores e formas na obtenção de padrões. Destacava-se a importância dos conceitos geométricos no desenvolvimento do senso artístico e criatividade, e vice-versa.

Essas leituras levaram-nos a perceber a importância da geometria para a Arte e o quanto o pensamento geométrico se enriquece com o desenvolvimento das idéias artísticas, numa espécie de complementação mútua. O ser humano percebe e compreende o mundo criando modos de apresentar sua compreensão, sendo a Arte e a geometria formas de manifestação humana que estão relacionadas e que se articulam e expõem-se de maneira rica e complexa.

Assim, outras questões se fizeram presentes. O ensino de geometria deve se limitar às aulas de Matemática? Qual geometria está presente nas aulas de Arte? Ou, qual geometria está presente no ambiente escolar?

Essas perguntas nos levaram a cogitar a possibilidade de convidar, também, professores de Arte para participarem dos encontros. Em sua formação, eles têm aulas de desenho geométrico e, por isso, acreditávamos que não teriam dificuldades na compreensão das idéias matemáticas envolvidas nas atividades. Porém, tínhamos receio de que a ênfase dada à geometria das pavimentações não estimulasse a participação desses professores, pois não havíamos pesquisado sobre os conteúdos abordados por essa disciplina nas séries consideradas.

Apesar de nosso receio inicial, convidamos professores de Arte e de Matemática para participarem dos encontros, devido, principalmente, ao enfoque interdisciplinar e às trocas entre os participantes, incluindo-se aí a pesquisadora. Sendo nosso objetivo possibilitar um ambiente de análises refletidas e interações, a participação de professores de Arte poderia sugerir novas formas de se conceber as pavimentações e o ensino de geometria.

Nesse processo dinâmico de elaboração das atividades e realização dos encontros com os professores-alunos, vimos, devido a diversas colaborações e análises, que a pergunta inicial, na qual buscávamos verificar as contribuições da proposta para os participantes, não satisfazia plenamente nossos anseios de pesquisadora.

Percebemos que o que se mostrava importante para nós era a compreensão dos significados da experiência vivida pelos professores-alunos, não apenas com relação à proposta apresentada, mas aos encontros em sua totalidade, com o intuito de compreendê-los e interpretá-los.

Assim, nossa pergunta diretriz ficou evidenciada da seguinte forma:

"Quais significados os professores de Matemática e de Arte atribuem ao trabalho com pavimentações do plano, envolvendo material manipulativo, em situação de ensino e aprendizagem de geometria?"

Sendo essa a pergunta norteadora de nosso estudo e considerando suas características, optamos pela abordagem qualitativa de pesquisa e recorremos à fenomenologia como opção metodológica para a organização e análise dos dados. Nesse momento, o orientador desta pesquisa e a pesquisadora depararam-se com a necessidade de buscar o trabalho de co-orientação, caracterizado pela orientação: do modo de compreender, analisar e interpretar os dados; dos estudos sobre concepções de conhecimento, de modo de ser do ser humano, no caso desta pesquisa, materializado nos modos de os professores-alunos serem uns com os outros, com seus alunos, com as atividades, com o conteúdo trabalhado; de estudos sobre ensino, aprendizagem e interdisciplinaridade.

Portanto, o orientador, o professor doutor Claudemir Murari, orientou: todo o procedimento relativo às pavimentações, ao raciocínio matemático presente nas atividades realizadas, ao estudo sobre a geometria e à confecção dos materiais manipulativos utilizados; a organização e realização da experiência vivida com os professores-alunos, durante o curso gerador dos dados desta pesquisa, intitulado *Recreações Geométricas em Pavimentação do Plano no ensino de Geometria*, ministrando os encontros realizados e acompanhando a sua efetivação. Assim, durante a realização do curso, há menção da participação do orientador. A co-orientadora, a professora doutora Maria Aparecida Viggiani Bicudo, orientou, como já mencionado, os procedimentos de análise e interpretação dos dados e os estudos que sustentaram esse trabalho no que concerne às concepções de ensino, aprendizagem, conhecimento, modo de ser do ser humano e interdisciplinaridade. Durante a análise e interpretação de dados, as presenças do orientador e da co-orientadora se mantiveram constantes.

Dessa forma, este estudo busca explicitar e interpretar os significados emergentes de um trabalho envolvendo atividades em pavimentação do plano e materiais manipulativos para o ensino de geometria nas séries finais do Ensino Fundamental, a partir das interações e manifestações ocorridas no contexto dos encontros com os professores-alunos de Matemática e Arte.

CAPÍTULO 1: SITUANDO A PESQUISA

1.1 A Geometria e seu Ensino

Historicamente, as primeiras idéias geométricas surgem de necessidades práticas de nossos antecessores relacionadas à agricultura, construção e astronomia. Observando o mundo físico, o homem descobre propriedades e relações espaciais que levam à noção de lei ou regra geométrica, abrindo caminho para o desenvolvimento dos conceitos geométricos. Os pitagóricos aprimoraram esse conhecimento, fundamentando-o no raciocínio dedutivo, dando origem a uma geometria sistemática, e, por volta do ano 300 a.C, Euclides organizou todo o conhecimento geométrico acumulado até então, dando corpo à uma geometria axiomática. Passados muitos séculos, o modelo euclidiano conservou-se como principal referencial para o ensino escolar da geometria, de forma a privilegiar as formalizações e abstrações em detrimento dos aspectos intuitivos e do movimento que leva à constituição dos conceitos geométricos.

Diante disso, as dificuldades encontradas pelos professores para ensiná-la e pelos alunos para compreendê-la resultam, em muitos casos, na sua exclusão dos currículos escolares ou em uma abordagem limitada à apresentação de nomes e definições, que trata o conhecimento geométrico como algo pronto, inquestionável e desligado de qualquer vínculo com o mundo físico.

Constata-se uma espécie de "crise" no ensino de geometria, que mobiliza a atenção de pesquisadores (PEREZ, 1991; PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995; FAINGUELERNT, 1999; GAZIRE, 2000; entre outros) quanto à necessidade de se resgatar esse ensino, devido, principalmente, à sua importância para o desenvolvimento do estudante e de seu pensamento lógico.

Del Grande (1994) defende a elaboração e inserção de currículos de geometria nas séries primárias, por meio de atividades que envolvam a percepção espacial e a exploração de noções intuitivas de espaço baseadas nas experiências das crianças, de forma a organizar suas informações visuais. A importância de se trabalhar a geometria desde as séries iniciais é corroborada por pesquisas como a de Detoni (2000) e Paulo (2001) que, ao analisarem o conhecimento espacial não proposicional de crianças em idade pré-escolar, manifestado por meio de gestos, falas, movimentos e expressões, evidenciam os atos cognitivos embasados na percepção da criança como um solo fértil para produção do conhecimento geométrico.

Revela-se importante a inclusão da geometria no currículo escolar em diferentes níveis de ensino, por meio de recursos que não se limitem à memorização de técnicas e definições, mas que valorizem as vivências dos alunos. Porém, o que se constata é que ela é deixada à margem, principalmente no Ensino Fundamental, quando a ênfase recai no ensino do sistema de numeração, das operações aritméticas e da álgebra (PEREZ, 1991; LORENZATO, 1995; GAZIRE 2000).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam a relevância dos conceitos geométricos para o desenvolvimento do aprendiz, pois o conhecimento geométrico desenvolve no aluno um tipo especial de pensamento, que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive. Ressaltam, também, a importância de se trabalhar com os alunos a exploração de situações problemas, as construções com régua e compasso, a visualização e a análise de simetrias, rotações e translações.

Há, porém, um distanciamento entre a reconhecida importância da geometria no processo educativo e a sua presença nas aulas de Matemática.

Gazire (2000), ao investigar as causas do não resgate do ensino de geometria, concluiu que existe uma espécie de "analfabetismo geométrico" que impossibilitaria a sua efetivação, resultando em um ciclo vicioso, no qual não se aprende e, portanto, não se ensina geometria.

Segundo Fainguelernt (1999, p. 21), existe uma divergência de opiniões entre os conteúdos e os métodos de ensino da geometria que colaboraria com esse quadro problemático.

> Uma das razões dessa divergência é que a Geometria possui muitos aspectos e, conseqüentemente, talvez não exista um caminho linear, claro, hierárquico desde os princípios elementares até as abstrações e axiomas, embora os seus conceitos devam ser considerados em diferentes estágios e diferentes pontos de vista.

Essa característica da geometria implica na existência de diferentes estratégias de ensino, por meio de diversas abordagens, como a manipulativa, a intuitiva, a dedutiva e a analítica (ICME, 1995). Abre-se um leque de possibilidades para o ensino de geometria, porém parecem aumentar as dificuldades para se abordar seus diferentes aspectos, de forma a relacioná-los, a fim de proporcionar uma aprendizagem mais significativa para o aluno. Em muitos casos, predomina o ensino de geometria que valoriza o processo dedutivo.

Dentre os fatores que contribuem com essa situação, podemos citar o distanciamento entre a geometria do currículo dos cursos de Licenciatura e a geometria do currículo da

Educação Básica. Moreira & David (2005) apontam que a tensão entre a educação matemática escolar e o ensino da Matemática acadêmica elementar acarreta conseqüências imediatas para a prática docente, já que o trabalho de ensinar requer uma percepção peculiar do objeto de ensino, porém, muitas vezes, ele acaba sendo a adaptação à escola dos conceitos, métodos e técnicas da Matemática científica, bem como de suas normas e de seus valores. A pouca referência, durante a formação inicial, às diversas abordagens de ensino de geometria colabora para que, na Educação Básica, ele se torne limitado, pois não se inteirar das possibilidades de exploração dos diversos aspectos do conhecimento geométrico pode levar o professor à desvalorização desse conteúdo, por não conhecer – ou compreender – suas complexidades e importância para o aprendiz.

Dentre as pesquisas voltadas para a formação continuada de professores em geometria, Nacarato (2000) enfoca a identificação e análise da produção dos saberes curriculares de professoras, das séries iniciais do Ensino Fundamental, envolvidas num processo de aprender e ensinar geometria. A autora aponta como essenciais a valorização e a produção coletiva de um currículo em geometria, para que os professores se apropriem dos elementos teóricos que constituem os pilares desta área do conhecimento.

Fonseca et al. (2002), também num trabalho com professores do primeiro segmento do Ensino Fundamental, apontam que estes profissionais se encontram distantes das discussões sobre o ensino de geometria, devido, em parte, às suas experiências durante o processo de escolarização.

Oliveira (2004) discute uma proposta para o ensino de geometria a partir de temas da Amazônia. Num processo de formação continuada junto a professores dessa região, ela investigou os conhecimentos geométricos desencadeados por meio dessa proposta. A autora destaca a importância de ambientes coletivos, como o LEM – Laboratório de Educação Matemática –, para o desenvolvimento profissional dos professores.

Em geral, as pesquisas que têm como foco a geometria na formação continuada do professor de Matemática expressam a preocupação dos autores em, junto a esses profissionais, abordar questionamentos, propor reflexões, discutir questões relativas a conteúdos e contribuir com novas estratégias para o processo de ensino e aprendizagem.

Outra perspectiva de investigações em geometria refere-se às pesquisas que apresentam sugestões ou propostas metodológicas para o seu ensino. Andrade & Nacarato (2004) apontam que o movimento de busca pelo resgate do ensino da geometria, por meio de novas estratégias e abordagens educativas, resulta na emergência de tendências didático-pedagógicas de pesquisa, como a experimental e a de ambientes computacionais. Os autores também destacam o considerável número de estudos envolvendo atividades que buscam valorizar situações cotidianas mediante a visualização e representação de objetos.

Investigações nessa perspectiva enriquecem as possibilidades de se enfocar os conceitos geométricos, podendo ter relevante contribuição para o ensino de geometria. O desafio é ultrapassar o âmbito da pesquisa acadêmica em direção à inserção de tais propostas nas salas de aula, no intuito de analisar suas possibilidades e limites na prática educacional, considerando-se a realidade social e cultural das escolas e dos alunos que dela fazem parte.

1.2 As Pavimentações no Ensino de Geometria

Uma pavimentação é o recobrimento de uma superfície. O estudo de suas propriedades envolve a análise de diversas idéias e conceitos geométricos e, nesse sentido, diversos autores têm abordado o tema em propostas e sugestões de ensino que buscam promover o envolvimento e a participação do aluno, apresentando atividades que valorizem a ação, a interação e a criação.

No livro *Geometry: an investigative approach*, O'Daffer & Clemens (1977) dedicam um capítulo da obra aos padrões de polígonos no plano. O termo *tiling* ou *tessellation*[2] é utilizado para nomear os padrões construídos com figuras poligonais que cobrem completamente o plano, sem 'furos' nem 'sobreposições' entre eles. Por meio do estudo desses padrões, os autores abordam diversos aspectos geométricos em atividades investigativas, relacionando o tema à arte ornamental e à criação de designs, pinturas e quadros.

Em sua pesquisa, Murari (1999) realizou um estudo diferenciado com alunos de sétima e oitava séries, por meio do estudo das pavimentações regulares do plano e do uso de espelhos e caleidoscópios. A proposta se tornou exeqüível e correspondeu às expectativas do autor, já que a utilização desses instrumentos se harmonizou com o estudo das pavimentações regulares, pois, com exceção de apenas uma, elas podem ser visualizadas em caleidoscópios. Essa visualização ocorre por meio de "bases", que são figuras geométricas especialmente construídas, por diversos métodos, para serem colocadas entre os espelhos a fim de gerar uma determinada pavimentação[3]. O autor constatou na beleza do visual obtido pela geração de

[2] Ladrilhamento.
[3] As bases são apresentadas no capítulo 2

imagens entre os espelhos um atrativo à aprendizagem dos conceitos, relações e propriedades geométricas necessários para a construção das bases.

Martins (2003), num estudo com alunos de oitava série do Ensino Fundamental, elaborou uma proposta, na qual foram utilizados caleidoscópios, sólidos geométricos, jogos e softwares educacionais, para a exploração de conceitos relacionados às tesselações do plano por polígonos e do espaço por poliedros. Os recursos da informática, segundo a autora, auxiliaram a investigação das propriedades geométricas envolvidas no estudo e possibilitaram agilidade e precisão na construção dos polígonos, dos poliedros e das pavimentações. Ela constatou que os recursos pedagógicos utilizados e explorados pelos alunos nas atividades propostas, possibilitaram a apreensão de conceitos, propriedades e relações geométricas e contribuíram para o desenvolvimento da percepção espacial e do senso crítico e artístico dos estudantes, bem como tornaram as aulas diversificadas.

Almeida (2003) desenvolveu uma pesquisa com alunos da segunda série do Ensino Médio, apresentando uma proposta para o ensino da geometria, via resolução de problemas, utilizando as pavimentações por polígonos regulares do tipo 1-uniforme e 2-uniforme, caleidoscópios e um jogo educacional de sua própria autoria (quebra-cabeça que, quando montado, representa uma pavimentação). A "base geradora" de uma pavimentação possui poucas regiões a serem pintadas, ao contrário das "bases transformadas" que possibilitam a visualização da mesma pavimentação, mas com um número maior de cores. Por meio do estudo das progressões aritméticas, obtidas pelo número de regiões das bases transformadas de uma determinada pavimentação, e da análise do processo em que são acrescentadas novas regiões de uma base para outra, a autora obtém um algoritmo que permite determinar o número de cores de uma base transformada. Ela utilizou um software de geometria dinâmica para realizar, com os alunos, a construção das bases transformadas, pois em muitos casos, o processo pode tornar-se difícil e demorado quando feito com régua e compasso. Em suas considerações, ela aponta seus propósitos de, por meio de seu estudo, oferecer instrumentos e recursos que auxiliem na integração multidisciplinar entre Matemática, Física, Ciências e Arte.

Batistela (2005), em sua pesquisa, constrói e apresenta um kit de espelhos elaborado a partir de um levantamento bibliográfico no qual busca identificar instrumentos feitos com espelhos e que são utilizados no ensino de geometria. A autora busca auxiliar o professor no ensino de conceitos geométricos em sala de aula, por meio das possibilidades educacionais dos instrumentos pesquisados e da beleza do visual obtido nos espelhos. A ampla bibliografia apresentada em seu trabalho revela a preocupação dos autores consultados em lançar mão de recursos atrativos, explorando as diversas possibilidades que eles oferecem para o ensino de geometria. O kit de espelhos, elaborado pela autora, possibilita a visualização de pavimentações planas, de poliedros e de pavimentações esféricas e é composto por caleidoscópios simples, espelhos articulados especiais, caleidoscópios generalizados e mira.

Gouveia (2005) elaborou uma proposta de ensino na qual aborda os fractais geométricos obtidos por meio da criação de bases caleidoscópicas transformadas. Fazendo uso de software de geometria dinâmica, caleidoscópios e seqüências numéricas, o autor trabalha diversos conceitos matemáticos em atividades desenvolvidas em um curso para alunos do primeiro ano da Licenciatura em Matemática. A ênfase de seu estudo recai, principalmente, no estudo das seqüências numéricas obtidas a partir do número de regiões, ou no número de cores, de uma base transformada.

Reis (2006) abordou o ensino de geometria esférica fazendo uso de caleidoscópios generalizados, um software de geometria esférica, esferas de isopor, tesselações esféricas, entre outros materiais. Trabalhando com alunos da Licenciatura em Matemática, analisou as possibilidades e limitações dos materiais manipuláveis para o ensino dos conceitos envolvidos em atividades baseadas na resolução de problemas. Ela identifica materiais manipuláveis, descreve a forma como foram utilizados pelos alunos e aponta o papel desses materiais na construção dos conceitos. No estudo, a autora também apresenta e compara as geometrias euclidiana e elíptica relacionando alguns axiomas e postulados geométricos.

Silva (1997) propôs um trabalho de exploração da representação geométrica de desenhos, tendo como base alguns ornamentos, tais como faixas, rosetas e mosaicos, para que, a partir desses elementos, sejam efetuados estudos sobre os movimentos de translação, reflexão e rotação das figuras, objetivando estimular no aluno o interesse pela geometria. A autora concluiu que a utilização de atividades envolvendo os ornamentos geométricos pode estimular a criatividade dos alunos.

No livro *Descobrindo padrões em mosaicos*, Barbosa (1993) convida o leitor para a arte de descobrir e criar padrões euclidianos. Nesta obra ele aborda as pavimentações regulares, as pavimentações por polígonos irregulares, as pavimentações por poliminós e os padrões ornamentais. Também apresenta comentários históricos relacionados à criação de mosaicos. De forma simples, porém rigorosa, o autor define diversos conceitos relacionados ao estudo das pavimentações, abordando aspectos matemáticos e artísticos, apresentando sugestões de criação de ornamentos. Uma outra obra do mesmo autor, denominada *Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula* (2002), aborda, ainda que de forma indireta, as pavimentações obtidas pelas interações que geram fractais, recobrindo, de forma auto-similar, uma determinada região. O autor destaca o caráter artístico dos fractais geométricos.

Em *Geometria dos Mosaicos*, da série paradidática *Vivendo a Matemática*, Imenes & Lellis (1987) apresentam conceitos geométricos relacionados às pavimentações planas, em uma linguagem apropriada para alunos do Ensino Fundamental.

Em geral, os trabalhos dos autores citados se relacionam, em suas conclusões, quanto às possibilidades educacionais do tema abordado. O caráter artístico das pavimentações é ressaltado nas atividades propostas. É possível notar convergências quanto à preocupação com o resgate da geometria, em todos os níveis escolares, de modo que ela se torne agradável para alunos e professores. Os autores buscam formas mais dinâmicas de abordá-la e identificam nas pavimentações possibilidades de se trabalhar os conceitos geométricos e, ao mesmo tempo, explorar a criatividade e o senso artístico.

Nos PCN de Matemática do Ensino Fundamental, encontramos recomendações de atividades que explorem a composição e decomposição de figuras, como ladrilhamentos, tangrans e poliminós, de forma que os alunos analisem o recobrimento de uma superfície. Também ressaltam a importância do estudo das transformações do plano, por meio de suas conexões com o cotidiano – como nas pavimentações por frisos e azulejos –, e a importância de relacionar os estudos sobre espaço e formas às obras de arte, pinturas, desenhos e artesanatos, de modo que os alunos possam estabelecer ligações entre a Matemática e outras áreas de conhecimento.

Porém, apesar das recomendações, atividades envolvendo pavimentações são pouco exploradas nos livros didáticos, fazendo com que elas apareçam timidamente na sala de aula, já que o livro, de maneira geral, tem um papel de destaque na prática do professor. Além disso, um trabalho educacional envolvendo o estudo das pavimentações exige o conhecimento do professor sobre o tema, a preparação do ambiente da sala de aula e recursos que, muitas vezes, não estão à sua disposição nas escolas. Assim, fatores como formação, formas de utilização de materiais didáticos e análise das condições de trabalho dos professores têm papel relevante quando o que se busca é uma prática diferenciada, cuja efetivação não limite suas possibilidades educacionais.

1.3 Materiais Manipuláveis: Possibilidades e Desafios Educacionais

Nos trabalhos analisados no item anterior, constata-se a utilização de material manipulativo na abordagem de aspectos experimentais e intuitivos da geometria, como forma de contribuir com a aprendizagem dos conceitos envolvidos nos estudos.

Neste sentido, Pais (1996) destaca a importância do uso de desenhos, objetos, materiais e imagens mentais para o desenvolvimento das idéias geométricas, principalmente nas séries do Ensino Fundamental.

> Eles funcionam como recursos didáticos auxiliares e representativos do processo de construção dos conceitos geométricos em suas correlações com os aspectos intuitivo, experimental e teórico da geometria. (PAIS, 1996)

Porém, o caráter “concreto” dos materiais manipuláveis pode ocultar falsas garantias de aprendizagem. Como afirma Machado (1990), é necessário considerar, como fundamentais, duas características do termo concreto: algo material ou manipulável e que possui um conteúdo de significações. Nesse sentido, o autor aponta que “é possível que um material manipulável tenha natureza arbitrária, sendo desprovido de significações para os que o manipulam, o que compromete a concretude que se pretendia enfocar” (MACHADO, 1990, p.47). O autor também destaca que é possível, se adequadamente percorridas as etapas de construção do conhecimento, tratar-se entidades abstratas como conteúdos plenos de significações. Concreto e abstrato são termos usados muitas vezes inadequadamente, com conotações antagônicas. A dicotomia concreto x abstrato deve ser superada, buscando-se a ênfase no processo dialético estabelecido entre eles. Nesse processo, as abstrações devem ser consideradas elementos mediadores da construção do conhecimento, fazendo parte do mundo real e a ele se destinando.

Outro fator a se considerar, no uso de recursos concretos, é que os materiais e sua manipulação permitem aos alunos o contato e a exploração de suas características durante as atividades de aprendizagem, porém esse processo não deve limitar-se a uma simples atividade lúdica. O uso superficial dos materiais restringe as possibilidades de se ultrapassar seus aspectos mais imediatos, de forma que, em se tratando do ensino de geometria, o risco pode ser a sua possível limitação a um nível puramente empírico.

Se, por um lado, o uso de materiais concretos no ensino de geometria pode limitar-se à experimentação, por outro, a total exclusão de atividades exploratórias desse tipo pode resultar na ênfase do ensino centrado apenas no aspecto geométrico formal ou axiomático, podendo comprometer o desenvolvimento de um ensino mais significativo para o aprendiz.

As correlações entre a experimentação e a formalização devem ser exploradas de modo que o estudante possa partir de uma abordagem para outra. Esse movimento se dá por meio de situações significativas que podem ser construídas a partir do diálogo entre professor e alunos, por meio das conexões com outras idéias e conceitos conhecidos, das correlações com o cotidiano e da comparação com outras situações.

As idéias geométricas fazem parte – e se fazem a partir – de situações cotidianas. Mas a geometria ultrapassa as fronteiras do mundo físico, por meio da criação de sistemas formais que organizam e inter-relacionam os objetos geométricos. A indissociabilidade entre os aspectos práticos e teóricos da geometria se evidencia em um movimento de mão dupla: a geometria axiomática surge de um conhecimento relacionado a problemas práticos, mas, também, é possível encontrar aplicabilidade para as mais puras especulações geométricas – como a teoria dos espaços e superfícies curvos, desenvolvida por Riemann e utilizada por Einstein (HAWKING, 2002).

Os materiais manipuláveis são importantes para a condução do aluno em direção ao refinamento dos conceitos geométricos. Ponte (2003) concorda que eles constituem um importante ponto de partida para o ensino de geometria, pois podem estimular explorações e formulações de conjecturas, já que a geometria é particularmente propícia para o ensino baseado na exploração e investigação. Porém, seu uso solicita planejamento e preparo. Faz-se necessário um cuidado especial no uso educacional de material concreto, já que nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego devem estar em segundo plano, associados à criação de estratégias de ação (FIORENTINI & MIORIM, 2005). É importante destacar que, muitas vezes, o processo investigativo pode se desencadear a partir de questões dos próprios alunos, podendo acarretar em mudanças na condução das atividades, solicitando do professor a reordenação de suas ações.

Assim, assumir um trabalho diversificado, envolvendo materiais manipuláveis ou outros recursos educacionais, significa lidar com mudanças na prática docente. Mudanças acarretam imprevisibilidade e incerteza, de forma que a falta de controle das situações faz com que muitos professores não se arrisquem em avançar para uma *zona de risco* (BORBA E PENTEADO, 2003), na qual é preciso avaliar as ações pedagógicas constantemente, buscar novos conhecimentos e reordenar a condução.

É importante considerar, também, que muitas variáveis influenciam as escolhas pedagógicas dos professores, como as suas concepções sobre educação e sobre a disciplina que leciona e as condições de trabalho que possuem. A limitação de verbas da escola para a compra de materiais, a falta de conhecimento em como lidar com os materiais que a escola possui – ou que possa vir a possuir – e a superlotação das salas de aula são alguns dos fatores determinantes para a inclusão ou exclusão de recursos diversificados nas práticas educativas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – e outras propostas educativas – recomendam alguns materiais específicos. No entanto, nem sempre há clareza do papel desses recursos no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, projetam-se algumas expectativas indevidas com relação ao seu uso, como a ilusão de que o material possa resolver todos os problemas de aprendizagem dos alunos.

Desse modo, torna-se importante problematizar os diferentes aspectos envolvidos na elaboração e utilização de materiais concretos em sala de aula, a fim de buscar possibilidades para que seu uso possa contemplar um ensino mais significativo e permitir a superação de suas limitações empíricas. Nesse sentido, torna-se imprescindível considerar as condições de trabalho docente, respeitando o saber do professor e possibilitando a ele a análise crítica quanto à utilização, às possibilidades e aos limites educacionais dos materiais manipuláveis.

Por fim, não podemos incorrer no risco de crer que os materiais manipulativos devam ser utilizados como únicos ou principais recursos para a construção dos conceitos, inclusive os conceitos geométricos. Eles devem, sempre que possível, estar articulados a outras formas de se alcançar os objetivos educacionais.

1.4 Uma Proposta de Trabalho Envolvendo Matemática e Arte

Segundo Bicudo (2006), a interdisciplinaridade é um modo de proceder que em sua origem, está pautado na lógica da disciplina, operando de maneira a interconectá-las, colocando-as em relação umas com as outras. A autora explica que transcendendo a interdisciplinaridade, pode-se avançar em direção à *transdisciplinaridade*, na medida em que se supera as inter-relações e se caminha para abordagens temáticas, complexas, que solicitam diferentes olhares de um mesmo vidente.

Neste estudo, a realização de um trabalho com professores-alunos de Matemática e Arte levou-nos a tangenciar a interdisciplinaridade, apontando-nos possibilidades, e revelando-nos as dificuldades próprias de um trabalho envolvendo distintas disciplinas.

Estimulados pelos resultados positivos dos estudos que apresentamos no item anterior, elaboramos um curso para professores de Matemática e de Arte, que lecionam nas séries finais do Ensino Fundamental, a fim de apresentar-lhes e discutir junto a eles as possibilidades de ensino de geometria por meio do estudo das pavimentações do plano associadas aos materiais manipulativos.

Como observamos, os autores citados chegaram a resultados positivos com relação ao envolvimento, interesse e curiosidade na manipulação e na visualização das pavimentações, resultados que também pudemos experienciar ao utilizarmos as pavimentações em aulas que ministramos e ao participarmos, como aprendiz, de aulas sobre o tema.

Vislumbramos na beleza das pavimentações, aliada ao uso de cores e de material manipulável, uma forma de abordar a geometria e explorar a estreita relação entre Matemática e Arte. O visual obtido pelos padrões de pavimentações, a criatividade envolvida na sua construção e a possibilidade de ampliar as formas de abordar o tema aumentaram nossas expectativas quanto ao enfoque interdisciplinar de nosso estudo.

Por meio de atividades envolvendo as pavimentações e material manipulativo, buscamos discutir experiências relacionadas ao ensino de geometria e aproximar professores de Matemática e Arte, contemplando suas diferentes visões sobre o tema abordado, possibilitando interações entre os diferentes olhares.

Demos prosseguimento à elaboração dos encontros, efetuando uma pesquisa de caráter bibliográfico, consultando artigos, dissertações, teses, livros e sites da internet. Na elaboração das atividades que seriam desenvolvidas nos encontros com os professores-alunos, abordamos:

- ✓ as pavimentações uniformes;
- ✓ a visualização de pavimentações em caleidoscópios;
- ✓ as pavimentações por tetraminós; e
- ✓ as pavimentações de Penrose.

A escolha desses itens teve o intuito de diversificar os conteúdos geométricos tratados, sendo que procuramos focar nossa atenção, principalmente, nos conteúdos sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para as séries consideradas. Contudo, cabe ressaltar que os autores consultados destacam possibilidades de utilização das pavimentações no ensino de variados conceitos, nos diversos níveis de ensino.

Para o preparo das atividades e confecção dos materiais que seriam utilizados nos encontros com os professores-alunos, pesquisamos os trabalhos desenvolvidos por diversos autores (ALMEIDA, 2003; BARBOSA, 1993; BATISTELA, 2005; DAFFER & CLEMENS, 1977; GARDNER, 1967; GOUVEIA, 2005; MURARI, 1995; REIS, 2006; SILVA, 1997, entre outros).

No estudo das pavimentações uniformes do plano utilizamos o kit-polígonos, que é um conjunto de polígonos regulares (triângulos, quadrados, hexágonos, etc) com mesma medida de lado, confeccionados em papel resistente. Para visualizar as pavimentações utilizamos caleidoscópios e bases caleidoscópicas. Utilizando tetraminós feitos em borracha (e.v.a) estudamos sua composição e desenvolvemos atividades sobre áreas, perímetros e semelhanças. Com as pavimentações de Penrose estudamos a divisão de segmentos, a razão áurea e a construção do segmento áureo.

Ao elaborarmos os textos e as atividades e confeccionarmos os materiais manipulativos que seriam utilizados nos encontros, almejávamos apresentar aos professores-alunos: um material que possibilitasse a exploração de diversos conceitos geométricos; atividades que proporcionassem o contato com uma abordagem de ensino voltada para a ação do aprendiz; materiais de baixo custo e de fácil confecção; e atividades que contemplassem aspectos relacionados à Arte e à Matemática.

No que se refere aos encontros, buscamos estabelecer um ambiente de confiança, no qual os professores-alunos ficassem à vontade para exporem suas vivências, crenças e opiniões. Um espaço que possibilitasse momentos de trocas de experiências, planejamento, discussões e aprendizados por meio do apoio mútuo e baseados no respeito aos participantes e suas crenças, como o ambiente constituído no estudo de Turrioni (2004): o LEM – Laboratório de Ensino de Matemática.

Quanto às atividades desenvolvidas para os encontros, elas não foram nosso objeto de estudo no sentido de vê-las como proposta didática. Dessa forma, nosso olhar não voltou-se, necessariamente, para a avaliação que os professores-alunos fazem delas. Nossa atenção direcionou-se para os significados da experiência vivida nos encontros, incluindo-se aí as atividades, os materiais, as interações entre os presentes, opiniões, questionamentos, etc. Porém, consideramos importante destacar que concebemos as atividades como desencadeadoras de reflexões sobre a geometria e seu ensino, de forma que, ao conhecê-las, verificar suas possibilidades e relacioná-las à sua prática, os professores-alunos poderiam, a partir de suas perspectivas, rever suas crenças quanto aos aspectos envolvidos.

1.5 Explicitando a Pergunta

No início de nosso estudo, buscávamos compreender as *colaborações da proposta para os professores no ensino de geometria*, mas descartamos tal possibilidade devido à dificuldade em caracterizarmos, adequadamente, o que poderia ser considerado uma "colaboração" e, mesmo que distinguíssemos o significado desse conceito, seria impossível mapear a realidade dos participantes a fim de especificar as colaborações da proposta para cada um deles.

Nessa ocasião, estávamos realizando os encontros com os professores-alunos. Abandonamos a possibilidade inicial e partimos em busca de um outro direcionador para o nosso estudo, o que nos levou a refletir sobre o caminho percorrido até então.

Durante a elaboração das atividades para os encontros, constatamos que muitos estudos desenvolviam propostas para o ensino da Matemática que proporcionavam resultados positivos em relação à participação dos alunos, mas que, muitas vezes, limitavam-se, unicamente, aos próprios estudos. Interrogávamos-nos: qual a razão de a maioria dos professores desconhecerem essas propostas? Faltam publicações que apresentem essas "novidades" ao professor, ou falta interesse ou condições para que o professor se atualize?

Com essas indagações em mente, preocupávamo-nos com o modo como os professores-alunos, sujeitos de nossa pesquisa, avaliariam o curso e perguntávamo-nos se o trabalho com as pavimentações e com o material que preparamos teria reflexo positivo em sua prática.

Leituras, discussões e análises de nossa própria vivência, fizeram-nos perceber que as mudanças na prática de ensino são complexas e envolvem conflitos internos e externos ao professor, bem como suas concepções pessoais sobre ensino, escola e disciplina (PONTE, 1996; POLLETINI, 1999). Entendemos com Hiratsuka (2003) que o processo de mudança da prática tradicional de ensino de Matemática cabe ao professor, visto que é ele quem toma a decisão de mudar. Mas não o faz sozinho, pois está no mundo coexistindo com outros, seus alunos, seus colegas de profissão. Compreendemos a importância dos diálogos, consensos e discordâncias com os colegas de profissão na re-elaboração de nossas crenças, valores e concepções, no repensar de nossa prática e na modificação de nossa ação em sala de aula.

Por outro lado, incomodava-nos o fato de haver poucas oportunidades para os professores exporem suas experiências e de não existir um espaço para discussões, nos cursos de capacitação e no próprio ambiente escolar. Como consideram Borba & Penteado (2003, p.70) "o trabalho individual estimula a estagnação. É o pensar e agir coletivo que poderão impulsionar e manter o professor numa zona de risco de forma que ele possa usufruir do seu potencial de desenvolvimento".

Passamos, assim, a dar atenção especial à preparação dos encontros, almejando um ambiente de confiança, onde os participantes pudessem verbalizar, sem constrangimento, suas opiniões, angústias, dúvidas e vivências. Desejávamos dialogar com os professores-alunos, voltando nossa atenção para as suas manifestações, a fim de analisar as interações e possibilitar momentos de reflexões sobre as concepções intrínsecas a um estudo coletivo envolvendo Arte e Matemática.

Por considerar que cada participante, ao estar com os outros em situação de investigação em geometria no estudo das pavimentações do plano, manifestaria o sentido da experiência vivida nos encontros, revelou-se importante para nós a compreensão do que se mostrava significativo aos professores-alunos.

Dessa forma, nosso estudo avançava em direção à compreensão e à interpretação das manifestações dos sujeitos quanto à experiência de participarem dos encontros. Esse era o foco de nossa atenção, levando-nos à seguinte pergunta diretriz:

"Quais significados os professores de Matemática e Arte atribuem ao trabalho com pavimentações do plano, envolvendo material manipulativo, em situação de ensino e aprendizagem de geometria?"

Enfocar essa pergunta leva-nos a perceber que a resposta, longe de ser simples e imediata, solicita análises e reflexões encaminhadas por outra pergunta: como desvelar estes significados?

Sendo nossa preocupação a participação nos encontros em termos do que essa vivência significou para os sujeitos da pesquisa, incluindo-nos, estes significados são construídos na relação dialógica e reflexiva entre os envolvidos. A compreensão desses significados

> (..) não é simplesmente um procedimento intelectual, pois, para que ela ocorra, é preciso que haja um envolvimento emocional entre falante e ouvinte. Isto é o mesmo que dizer que ao ouvir-se a fala do ser humano está-se, também, ouvindo emissões da existência desse ser. (MARTINS e BICUDO, 1989)

Nos encontros, participando com os professores-alunos, estando com eles, trazendo a experiência vivida para a nossa realidade, atentávamos-nos para aspectos relevantes das interações que se davam entre professores-alunos, pesquisadora e proposta pedagógica. Esta relação de abertura possibilitou-nos uma sintonia intersubjetiva importante para a compreensão dos significados que almejávamos desvelar e que surgiram nos modos de se expressar de cada um.

Dessa forma, este estudo surge a partir de nossa constatação, enquanto professora, da importância da geometria e da dificuldade em ensiná-la. Tem início com a elaboração de uma proposta envolvendo as pavimentações do plano por meio de um enfoque interdisciplinar Matemática/Arte e busca os significados que emergiram da experiência vivida coletivamente nos encontros por meio das manifestações dos sujeitos.

Clarificar estes significados abre-nos à sua compreensão e à possibilidade de ampliação de perspectivas de olhar para eles.

CAPÍTULO 2: PAVIMENTAÇÕES, MATEMÁTICA E ARTE

Neste capítulo, apresentamos as pavimentações abordadas nos encontros com os professores-alunos de Matemática e Arte e analisamos propriedades e conceitos geométricos envolvidos no estudo das mesmas. Buscamos relacionar as possibilidades educacionais das pavimentações no ensino de geometria e descrever alguns materiais manipulativos, bem como o seu uso. A seguir, trazemos alguns mosaicos artísticos, obtidos por meio de divisões e transformações do plano, e discutimos os aspectos geométricos envolvidos no seu estudo. Ao fim deste capítulo, discorremos sobre o software de geometria dinâmica *Cabri-Géomètre II* – utilizado nos encontros que realizamos –, buscando analisar, brevemente, o papel da informática em atividades educacionais, e apresentamos a construção de pavimentações com o uso desse software.

Devido à enorme quantidade de pavimentações existentes e à curta duração dos encontros, nos limitamos a abordar as pavimentações uniformes, as pavimentações por tetraminós e as pavimentações aperiódicas de Penrose, com o objetivo de trabalhar diferentes conceitos geométricos e possibilitar aos professores-alunos o contato com mais de uma categoria de pavimentação plana. Sugerimos, no decorrer desse capítulo, referências de autores, artistas e sites que abordam os diferentes aspectos envolvidos no estudo das pavimentações. Também, faremos menção a este capítulo com a finalidade de tornar mais claras as descrições apresentadas no capítulo quatro.

2.1 O que é uma Pavimentação?

A arte de desenhar pavimentações e padrões é muito antiga. Os mosaicos estavam presentes no artesanato e nos utensílios das civilizações babilônica, grega, chinesa, entre outras, sendo que muitos apresentavam padrões geométricos com simetrias ornamentais, formando desenhos harmoniosos (BARBOSA, 1993). Contudo, o estudo das propriedades matemáticas das pavimentações por polígonos é recente, e muitas partes deste tema permanecem ainda por explorar, bem como as suas potencialidades pedagógicas.

As pavimentações do plano por polígonos consistem no recobrimento de uma região plana sem que haja espaços ou sobreposição entre os polígonos. Vale lembrar que há outros tipos de pavimentações, como as espaciais, as esféricas e as hiperbólicas.

Na prática não conseguimos pavimentar todo o plano, pois sua superfície é infinita, o que torna a tarefa impossível. Dizemos, então, que um conjunto finito de polígonos pavimenta o plano parcialmente, ou que é uma pavimentação parcial do plano (BARBOSA, 1993).

Uma pavimentação possui nós e arestas. Os vértices dos polígonos são os **nós** da pavimentação e os lados são as **arestas**. Uma pavimentação é lado-a-lado quando uma aresta é lado comum a dois polígonos (*Fig. 1*).

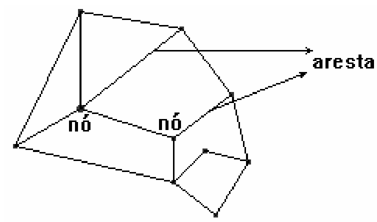


Fig. 1: *pavimentação lado-a-lado*

Uma pavimentação é **arquimediana** quando todos os nós possuem o mesmo número de arestas concorrentes. Ela é **platônica** quando é lado-a-lado, arquimediana e todos os polígonos ao redor de um nó possuem o mesmo número de lados.

A configuração ordenada de polígonos ao redor de um nó é denominada **arranjo**.

2.2 Pavimentações Uniformes por Polígonos Regulares

Na sua obra *Harmonice Mundi*, de 1619, Joannes Kepler (1580-1630) apresenta uma classificação das pavimentações obtidas a partir dos trabalhos de Platão e Arquimedes. Kepler provou a existência de exatamente onze pavimentações lado-a-lado constituídas por polígonos regulares. Tais pavimentações mostraram ter aplicações em cristalografia pelo fato de os átomos de vários cristais aparecerem em camadas que se projetam segundo os nós dessas pavimentações.

Segundo Grunbaum & Shepard (1989), uma pavimentação do plano é dita *k-uniforme* se apresenta *k* tipos de arranjos. Assim, uma pavimentação dita 1-uniforme apresenta um único tipo de arranjo. Uma pavimentação composta por dois tipos de arranjo de polígonos é denominada 2-uniforme; por três arranjos é denominada 3-uniforme; etc. Em Martins (2003) e Silva et al. (1994) é possível obter mais informações sobre a determinação das pavimentações *k-uniformes*. Nesse estudo, abordaremos somente as pavimentações constituídas por um único tipo de arranjo de polígonos regulares, ou pavimentações 1-uniforme.

Dentre os polígonos regulares, apenas os triângulos, os quadrados e os hexágonos formam pavimentações constituídas por um único tipo de polígono (*Fig. 2*). Esse fato é facilmente constatado já que a soma dos ângulos vértice ao redor de um nó deve ser exatamente 360^o. Como a medida do ângulo interno de um polígono regular com mais de seis lados é maior que 120^o e menor que 180^o, isso implica na necessidade de mais do que dois e menos que três polígonos em cada nó da pavimentação, ou seja, uma quantidade não inteira de polígonos. Portanto, não há pavimentações constituídas somente por polígonos regulares com mais de seis lados.

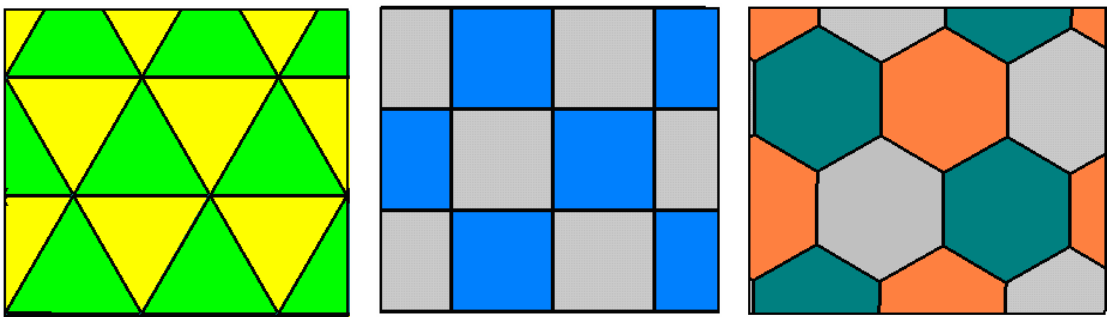


***Fig. 2:** pavimentações uniformes formadas por um único tipo de polígono regular*

As pavimentações uniformes formadas por um único tipo de polígono regular são também chamadas **pavimentações platônicas** (BARBOSA, 1993).

Não é possível pavimentar o plano somente com pentágonos regulares, pois, nesse processo, ocorrem vazios que não podem ser preenchidos por outro pentágono, sem sobrepô-lo a outro (*Fig. 3*).

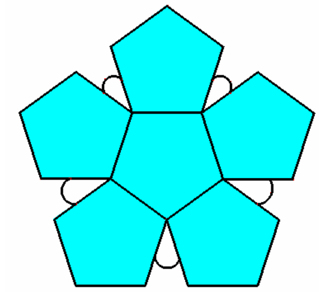


Fig. 3: *pentágonos regulares não formam pavimentações uniformes*

Murari (1999) apresenta um estudo matemático para a determinação de todos os arranjos formados por polígonos regulares e verifica quais desses arranjos formam pavimentações 1-uniformes. Como explica o autor, o ângulo vértice de um n-ágono regular mede $\frac{(n-2).180^o}{n} = 180^o\left(1-\frac{2}{n}\right)$, onde n é o número de lados do polígono. Considerando-se que a medida do ângulo interno de um polígono regular é menor que 180º e que o triângulo eqüilátero possui o menor ângulo interno, concluímos que são necessários, no mínimo, três e, no máximo, seis polígonos regulares para a constituição de um arranjo, já que a soma dos ângulos ao redor do nó deve ser igual a 360º.

Assim, se três polígonos regulares, um n_1-ágono, um n_2-ágono e um n_3-ágono, constituem um arranjo, obtemos a seguinte equação:

$$180^o\left(1-\frac{2}{n_1}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_2}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_3}\right)=360^o$$

$$\left(1-\frac{2}{n_1}\right)+\left(1-\frac{2}{n_2}\right)+\left(1-\frac{2}{n_3}\right)=2$$

$$\frac{2}{n_1}+\frac{2}{n_2}+\frac{2}{n_3}=1$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$$

Algumas soluções para essa equação são (6,6,6), (5,5,10), entre outras. Porém, um arranjo também pode ser formado por quatro, cinco ou seis polígonos regulares. O *Quadro 1* fornece a equação resultante e a equação equivalente para cada caso. O *Quadro 2* apresenta as soluções das equações, sendo n_i o número de lados do polígono.

Quadro 1: *equações para determinação dos arranjos formados por polígonos regulares*

nº de polígonos	Equação resultante	Equação equivalente
3	$180^o\left(1-\frac{2}{n_1}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_2}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_3}\right)=360^o$	$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$
4	$180^o\left(1-\frac{2}{n_1}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_2}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_3}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_4}\right)=360^o$	$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$
5	$180^o\left(1-\frac{2}{n_1}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_2}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_3}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_4}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_5}\right)=360^o$	$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$
6	$180^o\left(1-\frac{2}{n_1}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_2}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_3}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_4}\right)+180^o\left(1-\frac{2}{n_5}\right)+$ $180\left(1-\frac{2}{n_6}\right)=360^o$	$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2$

Quadro 2: *soluções das equações*

	nº solução	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
Três polígonos	1	6	6	6			
	2	5	5	10			
	3	4	5	20			
	4	4	6	12			
	5	4	8	8			
	6	3	7	42			
	7	3	8	24			
	8	3	9	18			
	9	3	10	15			
	10	3	12	12			
Quatro polígonos	11	4	4	4	4		
	12	3	3	4	12		
	13	3	3	6	6		
	14	3	4	4	6		
Cinco polígonos	15	3	3	3	3	6	
	16	3	3	3	4	4	
Seis polígonos	17	3	3	3	3	3	3

As soluções de número 12, 13, 14 e 16 apresentam duas possibilidades de ordenação dos polígonos, determinando, assim, dois tipos de arranjos distintos. Portanto, é possível formar 21 arranjos distintos por meio de polígonos regulares. Porém, nem todos pavimentam o plano. O arranjo (5,5,10), por exemplo, não se estende pelo plano pois, em algum momento, não é possível "encaixar" um decágono entre dois pentágonos (*Fig. 4*).

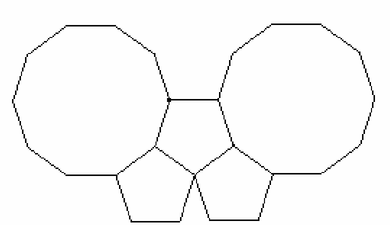


Fig. 4: *o arranjo (5,5,10) não gera uma pavimentação uniforme do plano*

Outro exemplo é o arranjo (3,3,6,6). Se estendermos este arranjo de tal modo que ele se repita no vértice V1, será impossível formar o mesmo arranjo no vértice V2 (*Fig. 5*)[4].

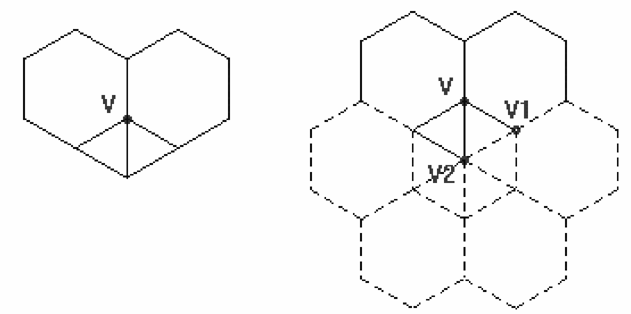


Fig. 5: *o arranjo (3,3,6,6) não gera uma pavimentação1- uniforme*

Continuando esse estudo, concluímos que dos 21 arranjos possíveis, apenas 11 pavimentam o plano, sendo que 3 formam as pavimentações por polígonos regulares do mesmo tipo, restando apenas 8 pavimentações 1-uniformes formadas por mais de um tipo de polígono[5] (*Fig. 9*). São elas (3,12,12), (4,6,12), (4,8,8), (3,6,3,6), (3,4,6,4), (3,3,4,3,4), (3,3,3,4,4) e (3,3,3,3,6).

O *Quadro 3* apresenta os arranjos formados por polígonos regulares, indicando quais originam, ou não, pavimentações regulares. As figuras *7* e *8* apresentam os 21 arranjos formados por polígonos regulares.

[4] Estendendo o arranjo (3,3,6,6) teremos uma pavimentação do tipo **2-uniforme**, ou seja, uma pavimentação composta por dois arranjos diferentes: V1=(3,3,6,6) e V2=(3,3,3,3,3,3).

[5] Existem 20 pavimentações do tipo **2-uniforme** (GRUNBAUM E SHEPHARD, 1987).

Quadro 3: *os 21 tipos de arranjos formados por polígonos regulares*

nº da solução	Arranjo	Forma pavimentação 1-uniforme?
1	(6,6,6)	**Sim**
2	(5,5,10)	Não
3	(4,5,20)	Não
4	(4,6,12)	**Sim**
5	(4,8,8)	**Sim**
6	(3,7,42)	Não
7	(3,8,24)	Não
8	(3,9,18)	Não
9	(3,10,15)	Não
10	(3,12,12)	**Sim**
11	(4,4,4,4)	**Sim**
12	(3,3,4,12)	Não
12b	(3,4,3,12)	Não
13	(3,3,6,6)	Não
13b	(3,6,3,6)	**Sim**
14	(3,4,4,6)	Não
14b	(3,4,6,4)	**Sim**
15	(3,3,3,3,6)	**Sim**
16	(3,3,3,4,4)	**Sim**
16b	(3,3,4,3,4)	**Sim**
17	(3,3,3,3,3,3)	**Sim**

Com o kit-polígonos é possível determinar todos os arranjos que constituem as pavimentações uniformes do plano. Ele é feito em cartolina ou emborrachado e é formado por triângulos escalenos, quadriláteros irregulares côncavos e convexos e polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 ou 15 lados (*Fig.6*).

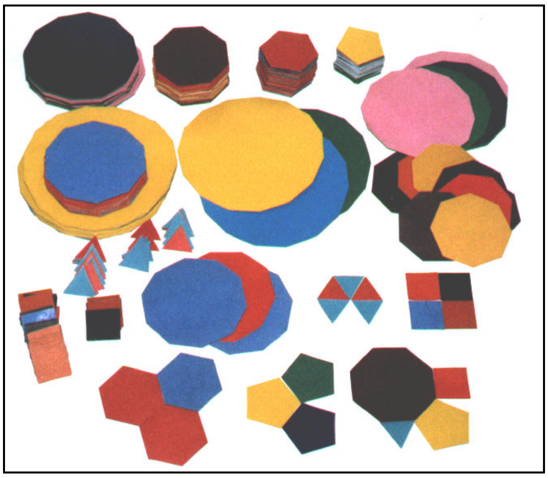


Fig. 6: *kit-polígonos*

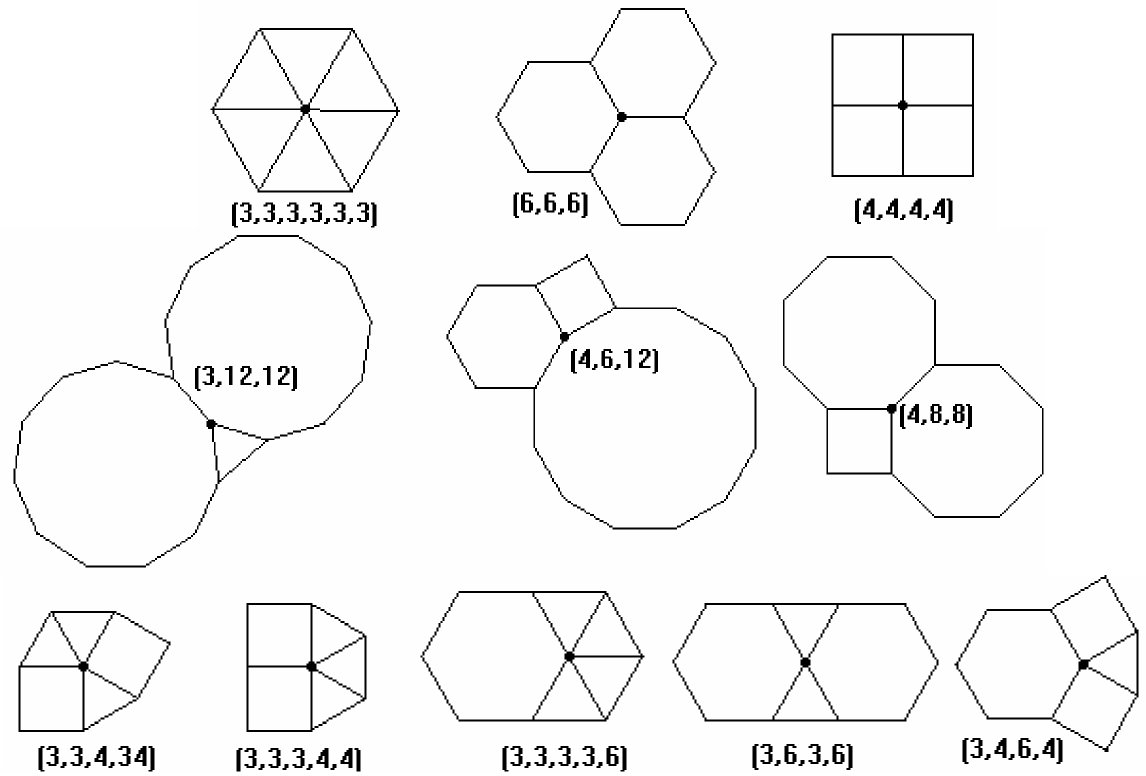


Fig. 7: *arranjos que formam pavimentações uniformes do plano*

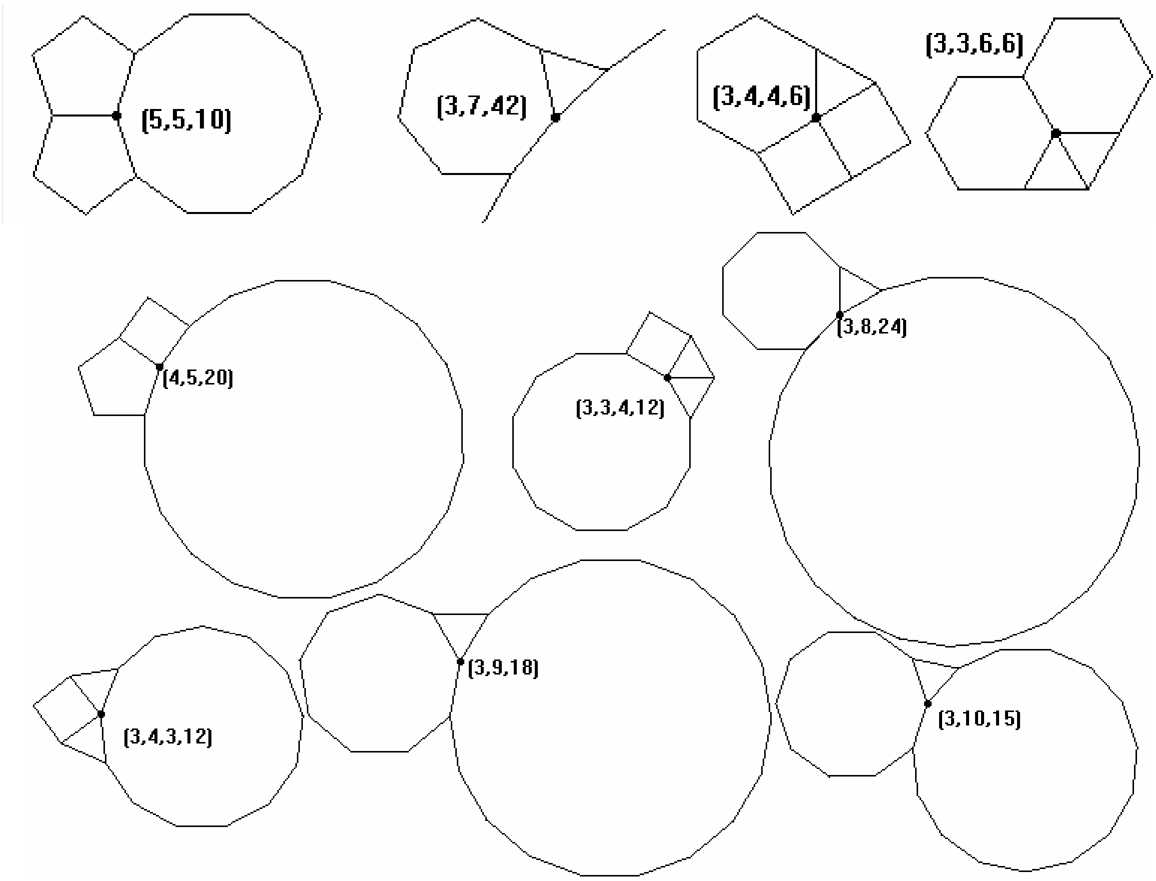
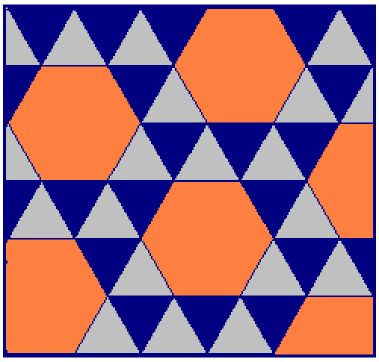
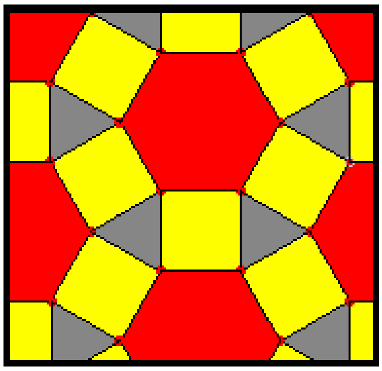


Fig. 8: *arranjos que não formam pavimentações uniformes do plano*

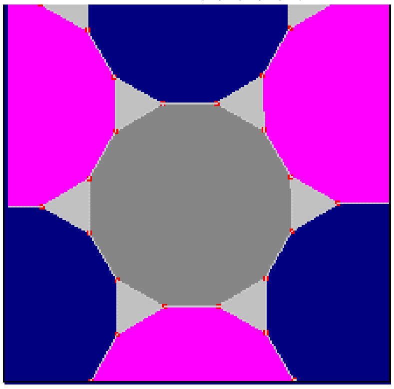
Na figura *9*, são apresentadas porções de pavimentações constituídas por mais de um tipo de polígono regular. A notação sob cada pavimentação representa os polígonos reunidos ao redor de um nó.



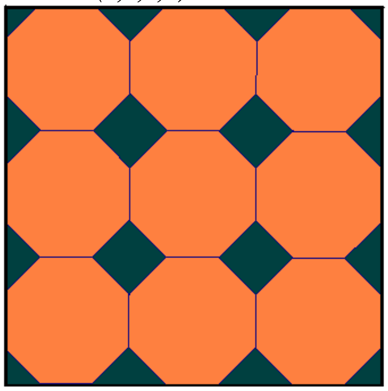
(3,3,3,3,6)



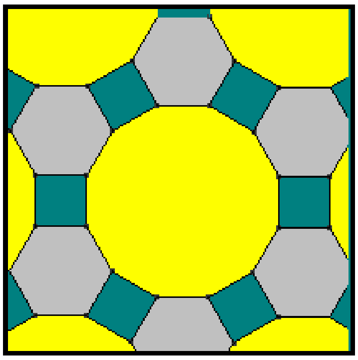
(3,4,6,4)



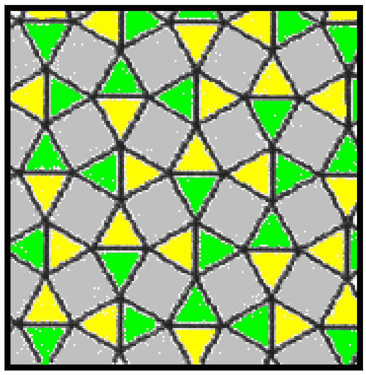
(3,12,12)



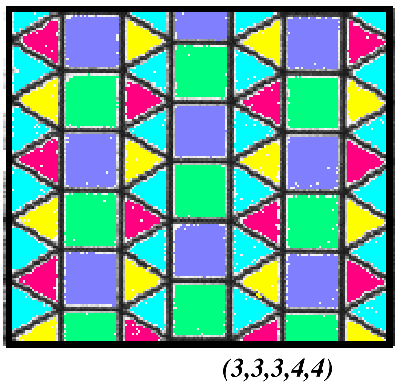
(4,8,8)



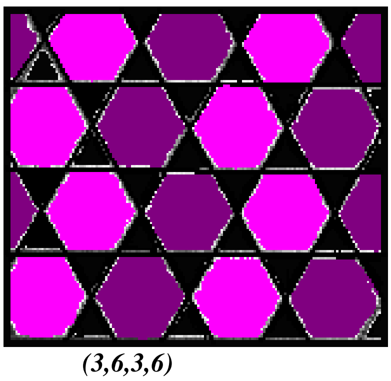
(4,6,12)



(3,3,4,3,4)



(3,3,3,4,4)



(3,6,3,6)

Fig. 9: *pavimentações formadas por mais de um tipo de polígono regular*

2.3 Visualização de Pavimentação em Caleidoscópio

O caleidoscópio é um conjunto de dois ou mais espelhos planos, articulados entre si, que possibilita a reflexão perfeita de imagens, ou seja, que gera imagens idênticas. Seu nome é originário de três palavras gregas: *Kalos* (belas), *eidos* (formas) e *skopein* (ver).

Ao observamos as imagens geradas em dois espelhos articulados entre si (*Fig. 10*), visualizamos, devido à reflexão de um espelho no outro, espelhos virtuais que parecem refletir as imagens de objetos colocados entre os espelhos. Porém, é importante atentar que as imagens geradas são sempre reflexões obtidas nos espelhos reais.

Fig. 10: *caleidoscópio formado por dois espelhos planos articulados*

O ângulo *x* de abertura entre os espelhos (*Fig.11*) determina o número de imagens formadas.

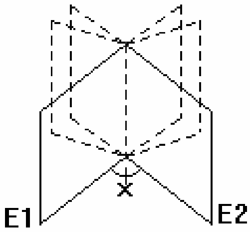


Fig. 11: *x representa o ângulo de abertura entre os espelhos*

Sendo *P* um ponto colocado entre dois espelhos articulados *E1* e *E2*, todas as imagens do ponto *P* pertencem a uma circunferência de centro na intersecção *O* dos espelhos (*Fig. 12*).

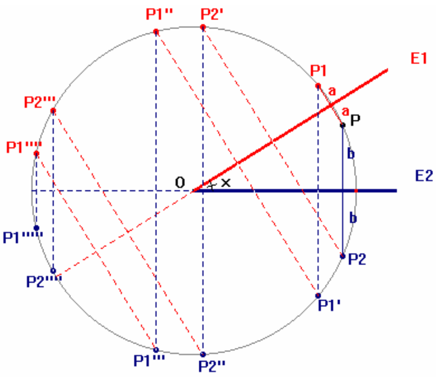


Fig. 12: *processo de reflexão de imagens de um ponto P entre dois espelhos articulados*

P fornece em *E1* a imagem *P1* e em *E2* a imagem *P2*. *P1* fornece *P1'* em *E2* e *P2* fornece *P2'* em *E1*, e assim sucessivamente. Sendo a a distância de *P* ao espelho *E1* e b a distância de *P* ao espelho *E2*, por isometria reflexional, temos que a distância de *P2* à *P1'* é $2a$ e de *P1* à *P2'* é *2b*. A partir de *P* as imagens são distribuídas na circunferência, de forma que a distância entre duas imagens consecutivas é, alternadamente, *2a* ou *2b*.

Para que ocorra repetição perfeita de imagens em dois espelhos articulados, é necessário que o dobro do ângulo de abertura entre os espelhos ($2\hat{x}$) divida 360º. Caso contrário, algumas imagens são formadas "atrás" dos espelhos virtuais e não podem ser visualizadas pelo observador (BARBOSA, 1993), como acontece com o ponto *P1''''* da figura 12.

Juntando um terceiro espelho aos dois espelhos articulados, de tal modo que os três espelhos sejam perpendiculares a um plano, formando um prisma de base triangular (como na figura 14), as imagens obtidas num dos espelhos formam novas imagens nos outros dois espelhos, e assim, sucessivamente, estendendo-se por todo o plano. Para que ocorra repetição perfeita de imagens (ou geração de imagens idênticas), cada ângulo formado por dois espelhos deve satisfazer a condição de o seu dobro ser divisor de 360º. Portanto, sendo $\hat{a}, \hat{b}$ e $\hat{c}$ os ângulos formados entre os espelhos, devemos ter:

$$\frac{360^o}{2\hat{a}} = \frac{180^o}{\hat{a}} = n_1 \quad ; \quad \frac{180^o}{\hat{b}} = n_2 \quad \text{e} \quad \frac{180^o}{\hat{c}} = n_3$$

Como $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^o$, então n_1, n_2 e n_3 devem satisfazer a equação: $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1$

cujas soluções inteiras são (3,3,3), (2,4,4) e (2,3,6). Dessa forma, os valores de $\hat{a}, \hat{b}$ e $\hat{c}$ são iguais a (60º,60º,60º), (90º,45º,45º) e (90º,60º,30º), respectivamente às soluções. Temos, portanto, três tipos de caleidoscópios de três espelhos planos: o eqüilátero, o isósceles e o escaleno (*Fig. 13*).

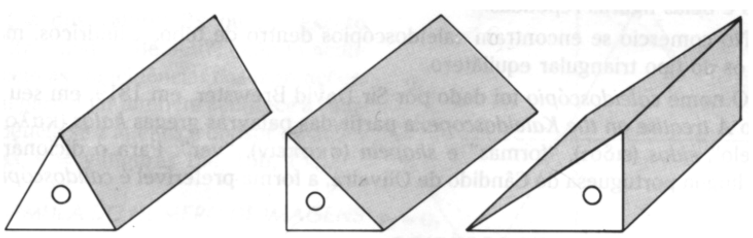


Fig. 13: *os três tipos de caleidoscópios planos de três espelhos*

Esses caleidoscópios permitem a visualização de pavimentações uniformes do plano, por meio de bases que são colocadas no seu interior. A construção dessas bases envolve o estudo de diversos conceitos geométricos, possibilitando o desenvolvimento de um trabalho diversificado no ensino de geometria. Para uso educacional Murari (1999) recomenda a utilização do caleidoscópio modificado (*Fig. 14*). Ele é composto por dois espelhos de medidas 22cm x 25cm e um espelho de 15cm x 35cm e possibilita a obtenção dos três tipos de caleidoscópio: o eqüilátero, o isósceles e o escaleno. Possui a vantagem de poder ser utilizado em grupo, facilitando a análise das simetrias.

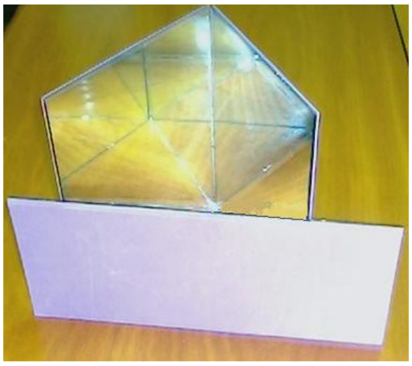


Fig. 14: *caleidoscópio modificado, para uso educacional*

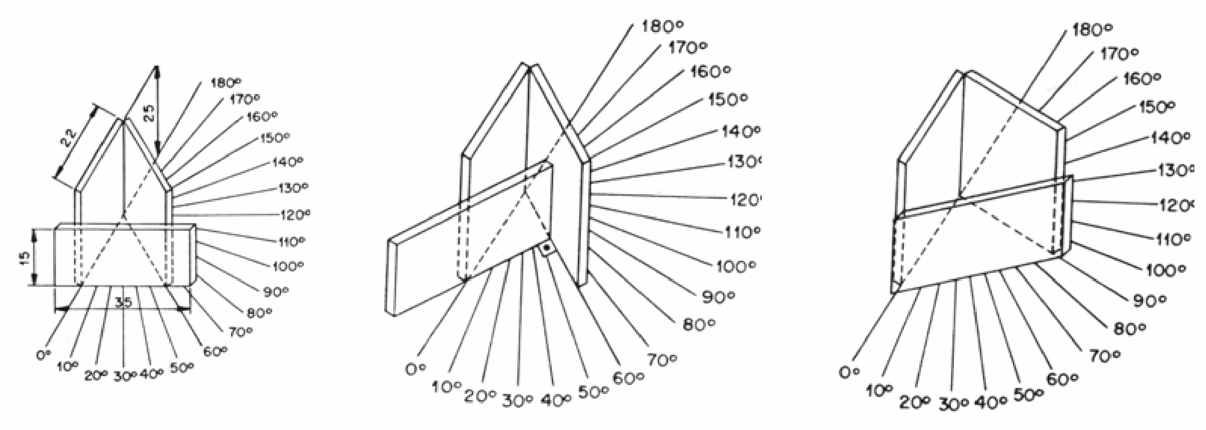


Fig. 15: *ângulos do caleidoscópio modificado eqüilátero, escaleno e isósceles*

Podemos visualizar as seguintes pavimentações em cada tipo de caleidoscópio:

- no eqüilátero: (3,3,3,3,3,3), (6,6,6), (3,6,3,6), (3,4,6,4), (4,6,12) e (3,12,12);
- no isósceles: (4,4,4,4,) e (4,8,8); e
- no escaleno: (3,3,3,3,3,3), (6,6,6), (3,6,3,6), (3,4,6,4), (4,6,12) e (3,12,12).

Apenas a pavimentação (3,3,3,3,6) não pode ser visualizada em nenhum dos tipos de caleidoscópios, pois ela não apresenta as linhas de simetria que possibilitam a construção de bases para a sua visualização. Para visualizar as pavimentações (3,3,4,3,4) e (3,3,3,4,4) é necessário um caleidoscópio de quatro espelhos, de base quadrada ou retangular.

2.3.1 Bases Caleidoscópicas

A base caleidoscópica é uma região que contém em seu interior segmentos apropriados, possibilitando a visualização, nos caleidoscópios, de pavimentações do plano. Ela também pode ser denominada: base substituível, base geradora, base transformada, padrão-básico, triângulo-base e figura-base.

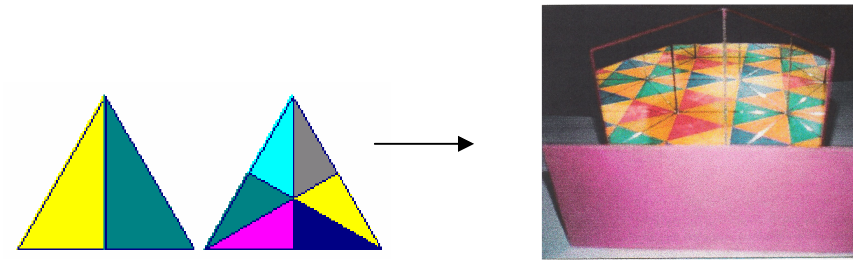


Fig. 16: *bases caleidoscópicas que permitem a visualização da pavimentação (3,3,3,3,3,3)*

Para visualizar uma mesma pavimentação, encontramos vários tipos de bases, as **geradoras** e as **transformadas**. As

bases transformadas contêm em si bases geradoras. A figura *17* apresenta a base geradora e duas transformadas que possibilitam a visualização da pavimentação uniforme (3,4,6,4) em caleidoscópio eqüilátero de três espelhos.

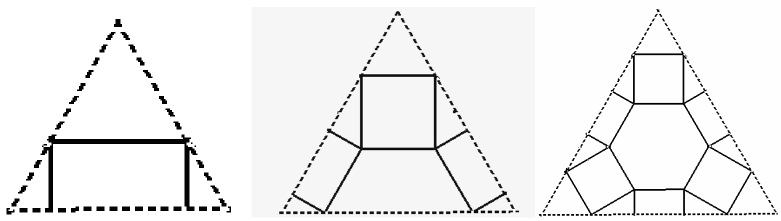


Fig. 17: *base geradora e bases transformadas para visualização da pavimentação (3,4,6,4)*

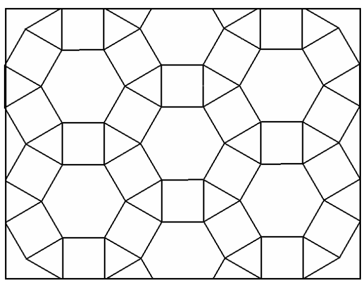


Fig. 18: *pavimentação (3,4,6,4)*

Observe na figura *17* que, de uma base para a próxima, há um aumento do número de regiões no interior delas. A quantidade de regiões da base irá influenciar na dimensão dos polígonos gerados na visualização da pavimentação em caleidoscópio. Desse modo, quanto maior for o número de regiões no interior da base, menor serão os polígonos que formam a pavimentação. Essas regiões podem se coloridas, ensejando um estudo sobre harmonia e contraste de cores, de forma que quanto maior o número de regiões da base, mais combinações de cores são possíveis.

Murari (1999) apresenta três métodos para a determinação de bases para visualização de pavimentações regulares. O terceiro método proposto pelo autor é baseado no fato de que as pavimentações apresentam linhas de simetria reflexionais em relação às mediatrizes dos lados dos polígonos. É possível identificar quais linhas de simetria da pavimentação são, também, linhas de simetria de um ou mais polígonos distintos que formam essa pavimentação. Essas linhas de simetria, comuns aos polígonos e à pavimentação, formam redes de triângulos congruentes, com o mesmo padrão de segmentos de reta formados no interior de cada um desses triângulos. Desse modo, é possível observar na pavimentação várias redes de triângulos congruentes, de mesma configuração, os quais são "bases" para visualização da pavimentação. A próxima figura apresenta uma aplicação desse método, na busca de bases geradoras e transformadas para a pavimentação de configuração (3,4,6,4).

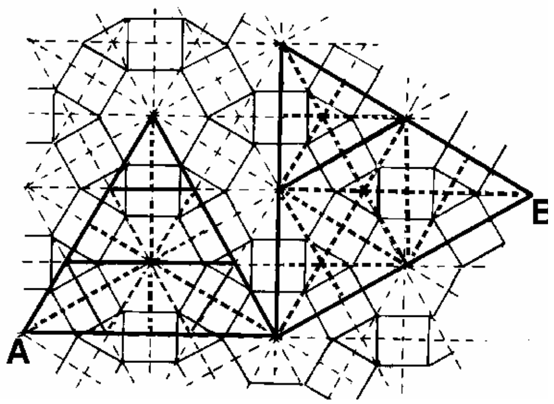


Fig. 19: *método para determinação da base caleidoscópica (3,4,6,4)*

Na figura acima, as bases estão contidas nos triângulos com traços reforçados. Considere o triângulo maior A. O primeiro triângulo da escala (dentro de A) representa a base geradora; o segundo conterá a base geradora mais três réplicas dela, gerando a primeira base transformada; e o terceiro triângulo, por sua vez, conterá a base geradora mais oito réplicas dela, formando a segunda base transformada (essas bases são apresentadas na figura *17*). Note que o traço cheio que representa a base do triângulo menor deve ser sempre desconsiderado ao passar de uma base transformada para outra. O triângulo B apresenta uma outra base geradora e a sua primeira transformada, que possibilitam a visualização da mesma pavimentação.

Informações mais detalhadas sobre o processo de determinação das bases caleidoscópicas podem ser obtidas nos estudos de Murari (1999), Almeida (2003), Martins (2003), Batistela (2005) e Gouveia (2005).

2.4 Tetraminós

Os poliminós são figuras planas formadas pela conexão, lado-a-lado, de quadrados congruentes. Eles são denominados de acordo com o número de quadrados que possuem: monominó, dominó, triminó, tetraminó, pentaminó, etc.

Barbosa (2005) informa que, talvez, o mais antigo problema envolvendo os poliminós seja o apresentado por Henry Ernest Dudeney, em 1907. Tal problema consistia no recobrimento de um tabuleiro quadrado 8x8 com poliminós. Os poliminós foram estudados por Salomon W. Golomb em 1953 e amplamente divulgados por Martin Gardner em diversos artigos e em seu livro *Divertimentos Matemáticos*, de 1967. Desde então, muitos jogos e desafios com o uso dos poliminós têm sido propostos. Até hoje o estudo dos poliminós é tema de diversas pesquisas, porém não foi encontrado um algoritmo que determine a quantidade de cada classe de poliminó.

Conectando quadrados congruentes, ou monominós, em conjuntos de dois, com um lado em comum, obtemos os dominós (*Fig 20*).

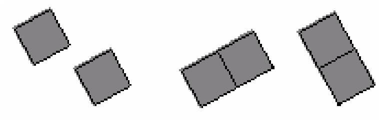


Fig. 20: *monominós e dominós*

Unindo mais um quadrado unitário a um dos quadrados do dominó, de tal modo que eles tenham um lado em comum, obtemos os triminós. Porém, há dois tipos de triminós: o retangular e o curvado (*Fig. 21*).

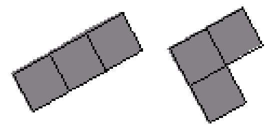


Fig. 21: *triminó retangular e triminó curvado*

Acrescentando mais um quadrado unitário ao triminó retangular, podemos obter os seguintes tetraminós:

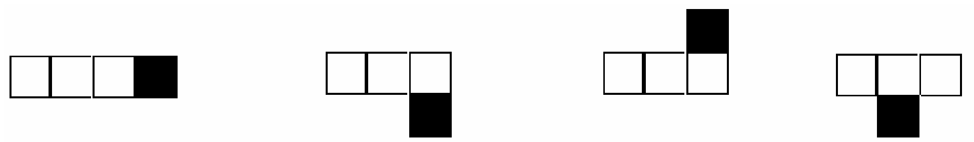


Fig. 22: *tetraminós gerados a partir do triminó reto*

Adicionando um quadrado unitário ao triminó curvado, podemos obter:

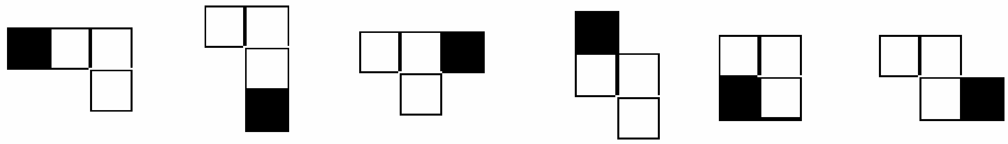


Fig. 23: *tetraminós gerados a partir do triminó curvado*

Nesse processo de geração dos tetraminós, alguns tipos se repetem, e, portanto, existem sete tipos de tetraminós, que designaremos pelas letras do alfabeto: L, L invertido, Z, Z invertido, O, T e I (*Fig. 24*).

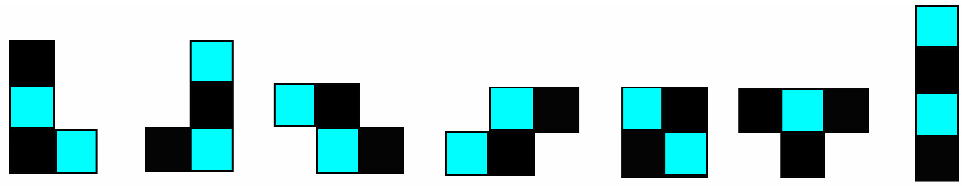


Fig. 24: *os sete tipos de tetraminós: L, L invertido, Z, Z invertido, O, T e I*

O tetraminó L e o L invertido são enantiomorfos, ou seja, têm formas contrárias, só podendo coincidir por reflexão. O mesmo ocorre com os tetraminós Z e Z invertido.

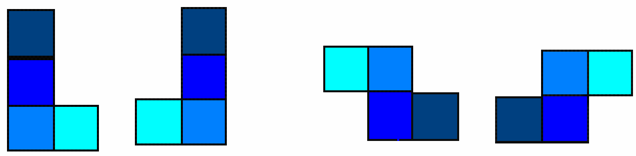


Fig. 25: *tetraminós enantiomorfos*

Outros poliminós podem ser obtidos, continuando-se esse processo de conexão de quadrados unitários aos já existentes. Assim, um polígono será um *n-minó* se, e somente se, for composto de *n* quadrados congruentes conectados por, pelo menos, um lado.

Quanto às vantagens do uso dos tetraminós, em relação aos outros poliminós, em atividades com alunos, Barbosa (1995) argumenta: "os dominós e triminós apresentam menor versatilidade educacional; enquanto os pentaminós, hexaminós e heptaminós, são, respectivamente, em número de 12, 35 e 107 tipos, além de serem compostos de maior número de quadrados, dificultando a construção, a manipulação e a visualização espacial".

Os tetraminós podem ser feitos em madeira, material emborrachado, ou papel resistente. Barbosa (1993) sugere que, na construção das peças, faces opostas tenham cores diferentes, pois este cuidado permite que peças enantiomorfas sejam distinguidas durante as atividades. Pode-se, em uma das faces da peça, representar os segmentos que identificam os quadrados unitários, para facilitar a contagem das unidades.

Diversas atividades, envolvendo conceitos geométricos, podem ser desenvolvidas utilizando-se os tetraminós. É interessante iniciar as atividades por meio de um estudo exploratório sobre a composição dos tetraminós por quadradinhos unitários, a análise do perímetro de cada peça e o estudo de seus eixos de simetria.

Pode-se propor aos alunos diversos problemas de pavimentação parcial do plano, em especial regiões retangulares. O papel quadriculado pode auxiliar na tarefa de representação das soluções, pois, em certos casos, pode haver mais de uma solução para o mesmo problema. O retângulo abaixo (*Fig. 26*) representa a pavimentação de uma região retangular 4 x 6, por dois tetraminós T, dois Z, um L e um L invertido.

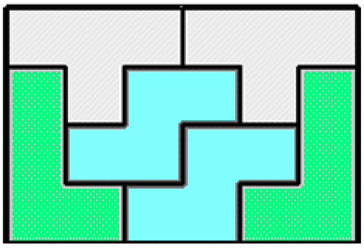


Fig. 26: *pavimentação de uma região retangular 4 x 6 por tetraminós*

Problemas com faixas podem ser propostos em atividades interdisciplinares, envolvendo a criação de padrões geométricos e a combinação de cores. Uma *faixa cheia* é uma pavimentação parcial do plano, na qual uma região compreendida entre duas retas paralelas é preenchida por meio da repetição de um *motivo*, sem que ocorram lacunas ou sobreposição das peças (BARBOSA, 2005). A distância entre as retas paralelas determina a largura da faixa. No estudo das faixas, pode-se investigar os padrões de simetria.

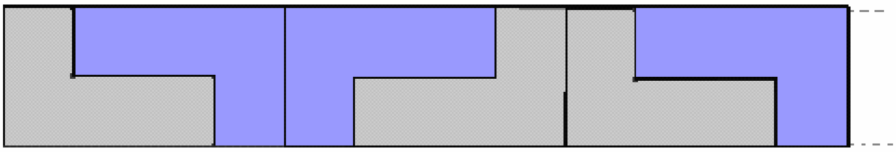


Fig. 27: *faixa cheia de largura 2*

Outro conteúdo a ser explorado com os tetraminós é a replicação de figuras. Em atividades de ampliação das peças, pode-se analisar as razões de semelhança entre os lados e as áreas das figuras.

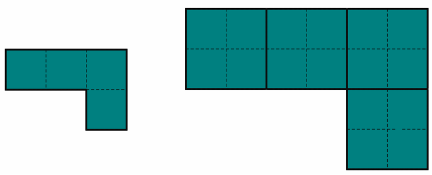


Fig. 28: *ampliação do tetraminó L*

Há muitas possibilidades de uso educacional dos poliminós, porém a presença deste recurso didático nas salas de aula ainda é tímida. Contudo, vale ressaltar que existem diversos trabalhos publicados em revistas e sites da Internet, envolvendo o estudo dos poliminós.

2.5 Pavimentação de Penrose por Kites e Darts

O físico e matemático britânico Roger Penrose (*Fig. 29*), aficcionado por recreações matemáticas, percebeu que é possível pavimentar uma superfície plana de maneira não periódica, utilizando apenas dois quadriláteros irregulares denominados *kite* e *dart*. Esses quadriláteros podem ser construídos a partir do pentágono regular (*Fig. 30*).

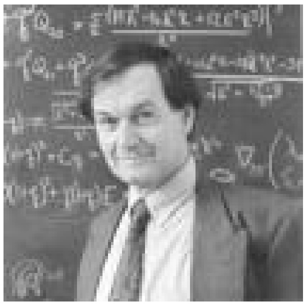


Fig. 29: *Roger Penrose*

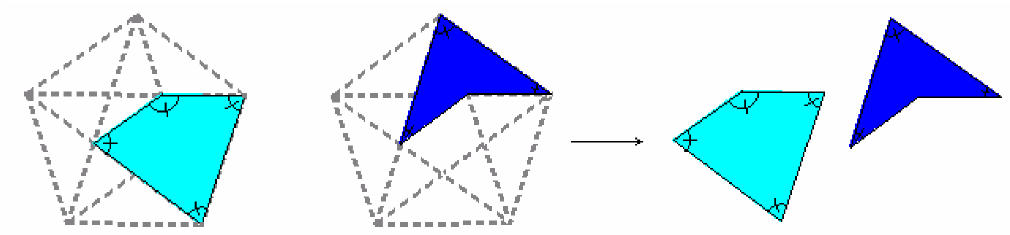


Fig. 30*: kite e dart gerados do pentágono regular*

Combinando kites e o darts, podemos obter pavimentações periódicas (*Fig. 31*) ou aperiódicas (*Fig. 32*).

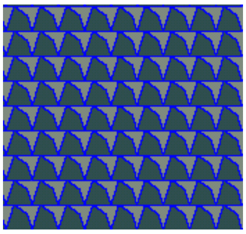


Fig. 31: *pavimentação periódica*

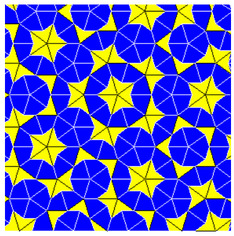


Fig. 32: *Pavimentação aperiódica*

As *pavimentações de Penrose* são aperiódicas, isto é, não podem ser obtidas pela translação de um padrão da pavimentação. Exemplificando, se tivéssemos uma transparência de uma pavimentação de Penrose seria impossível movê-la em uma determinada direção de modo que ela coincidisse novamente com a pavimentação original.

Enfocamos, em nosso estudo, as relações entre as pavimentações de Penrose e o número áureo, amplamente conhecido pelo seu caráter estético e íntima ligação com idéias artísticas.

A seguir, apresentamos a determinação do segmento áureo, as relações do pentágono regular com o número áureo e a construção das peças das Pavimentações de Penrose.

2.5.1 O Segmento Áureo e a Razão Áurea

Se um segmento é dividido em duas partes, de tal modo que a razão entre as medidas do segmento todo e da parte maior é igual à razão entre as medidas da parte maior e da parte menor, essa razão é chamada razão áurea.

Assim, um segmento $\overline{AB}$ estará dividido na razão áurea (ou em média e extrema razão) quando:

medida do todo ÷ medida da parte maior = medida da parte maior ÷ medida parte menor.

Se considerarmos o segmento $\overline{AB}$ e o ponto P interno à $\overline{AB}$, então P divide $\overline{AB}$ na razão áurea se $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$, sendo $AP > PB$

Fig. 33: *divisão do segmento* $\overline{AB}$ *na razão áurea*

Determinação algébrica do segmento áureo

Considere um segmento $\overline{AB}$ de medida y e o ponto P que divide esse segmento em duas partes de medidas x e y-x, sendo x a medida da maior delas (*Fig. 34*).

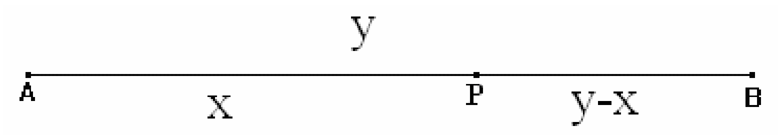


Fig. 34: *divisão de um segmento*

Para que o segmento esteja dividido na razão áurea, a seguinte proporção deve ser verificada: $\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x}$. Dessa proporção, obtemos a seguinte equação do segundo grau $x^2 + yx - y^2 = 0$, cujo determinante é $\Delta = y^2 + 4y^2$. Como Δ>0, a equação possui solução real. Resolvendo a equação obtemos as seguintes soluções:

$$x_1 = y\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad x_2 = y\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right) \; (<0)$$

Assim, a medida da parte maior $\overline{AP}$ é $y\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ e a medida da parte menor $\overline{PB}$ é $y\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$:

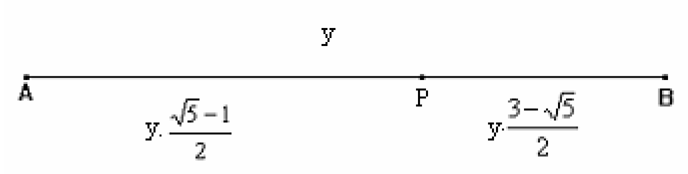


Fig. 35: *divisão de um segmento na razão áurea*

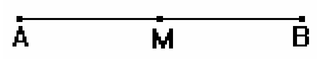
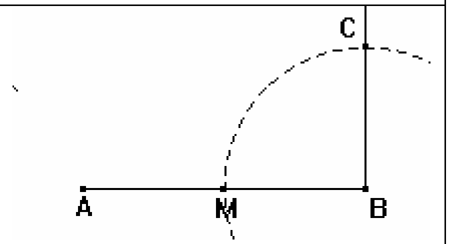
Podemos verificar que, $\frac{AB}{AP}=\frac{AP}{PB}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cong$ 1,618. Essa é a razão áurea.

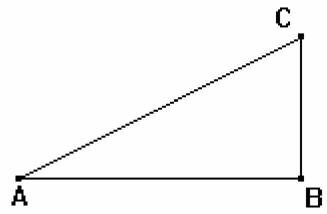
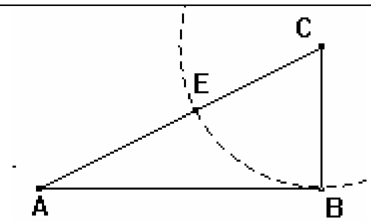
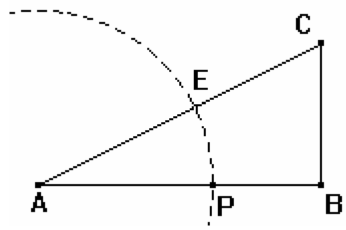
Portanto, AP é segmento áureo de AB. Observe, também, que $\overline{PB}$ é segmento áureo de $\overline{AP}$, pois a razão entre as medidas de AP e PB é a razão áurea. Contudo, $\overline{PB}$ não é interno à $\overline{AP}$, como ocorre no caso anterior.

<u>Determinação Geométrica do Segmento Áureo</u>

O *Quadro 4*, apresenta a divisão de um segmento unitário na razão áurea.

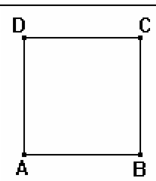
Quadro 4: *divisão de um segmento unitário na razão áurea*

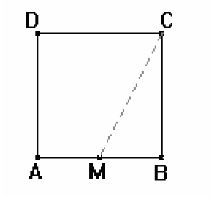
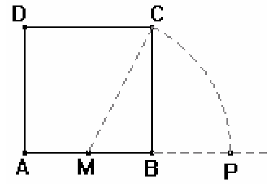
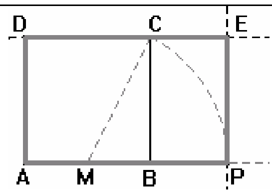
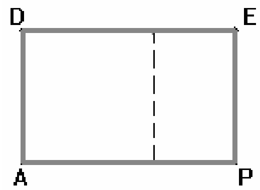
Considere o segmento $\overline{AB}$ de medida unitária. Determine o seu ponto médio *M*	
Trace uma semi-reta perpendicular à $\overline{AB}$ com origem em *B* e determine o ponto *C*, sendo que $BC = \frac{AB}{2}$	

<table>
<tr><td>Trace o segmento $\overline{AC}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pelo teorema da Pitágoras, temos que: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Assim:
$AC^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \longrightarrow AC^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4} \longrightarrow AC = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$</td></tr>
<tr><td>Marque o ponto E sobre $\overline{AC}$ tal que $CE = CB$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">AE=AC-EC, logo $AE = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. E essa é a medida do segmento procurado.</td></tr>
<tr><td>Marque o ponto P sobre $\overline{AB}$ de modo que AP=AE</td><td>
</td></tr>
<tr><td>P divide $\overline{AB}$ em média e extrema razão e $\overline{AP}$ é segmento áureo interno de $\overline{AB}$</td><td>
</td></tr>
</table>

Outra construção associada à razão áurea é o retângulo áureo. Nele, o lado menor é o segmento áureo do lado maior. Podemos construir um retângulo áureo a partir de seu lado menor (*Quadro 5*).

Quadro 5: *construção do retângulo áureo*

<table>
<tr><td>Dado o lado menor $\overline{AB}$, do retângulo a ser construído, determinar o quadrado $ABCD$</td><td>
</td></tr>
</table>

Marcar o ponto médio M de $\overline{AB}$.	
Por Pitágoras, $MC^2 = MB^2 + BC^2$. Sendo $BC = AB$, temos que: $MC^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AB^2 \longrightarrow AC = \frac{\sqrt{5}}{2}AB$	
No prolongamento do lado $\overline{AB}$, marcar o ponto P de tal modo que MP=MC	
Traçar uma perpendicular à $\overline{AP}$ por P e marcar o ponto E, intersecção da perpendicular com o prolongamento de $\overline{DC}$.	
Como $AP = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)AB$ e $AD = AB$, a razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo construído é a razão áurea.	
Assim, *APED* é um retângulo áureo	

Podemos observar a utilização de retângulos áureos em diversas obras de arte, como na mais famosa obra de Leonardo da Vinci, na qual a face de *Monalisa* parece estar contida, exatamente, num retângulo áureo (*Fig. 36*).

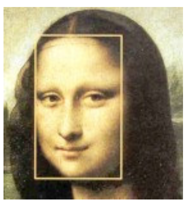


Fig. 36: *face de Monalisa*

Uma espiral áurea (*Fig. 37*) pode ser construída a partir de um retângulo áureo.

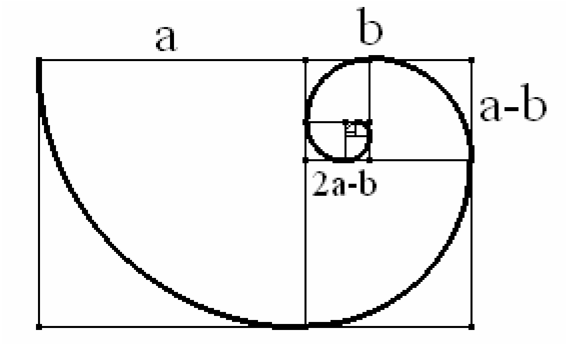


Fig. 37: *espiral áurea*

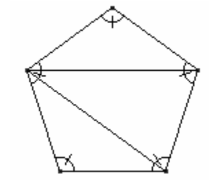
Observe na figura anterior que, extraindo do retângulo áureo um quadrado, cujo lado tenha a mesma medida do seu lado menor, obtemos outro retângulo semelhante ao primeiro e, portanto, também áureo:

Considere o retângulo áureo (maior), apresentado na figura *37*. Sendo *a* e *a+b* as medidas dos seus lados, a seguinte proporção é verificada: $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$. Pelas propriedades das proporções, obtemos esta outra proporção: $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$. Assim, o retângulo de lados *a* e *b* também é áureo.

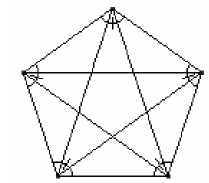
Podemos continuar esse raciocínio para mostrar que também são áureos os retângulos de lados *b* e *a – b*, *a – b* e *2b – a*. Dessa forma, quaisquer dois elementos consecutivos da seqüência: a + b, a, b, a – b, 2b – a, 2a – 3b, 5b – 3a, 5a – 8b, 13 b – 8a, ..., são lados de um retângulo áureo e, portanto, o processo de retirar quadrados de retângulos áureos conduz a uma seqüência infinita de retângulos áureos, com dimensões cada vez menores e tendendo a zero.

2.5.2 O Pentágono Regular e a Razão Áurea

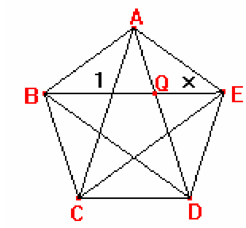
O pentágono regular é considerado um polígono esteticamente perfeito. Há uma estreita relação entre essa característica e o número áureo.



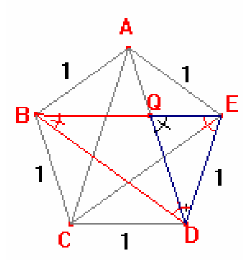
Dividindo um pentágono regular em triângulos, podemos verificar que a medida de cada ângulo interno do pentágono regular é: $\dfrac{3*180^0}{5}=108^o$.



Em um polígono regular, suas diagonais dividem os ângulos internos em partes congruentes. No pentágono regular cada ângulo interno é dividido por duas diagonais em três ângulos de 36° cada.



Considere o pentágono *ABCDE* de lado unitário e o ponto *Q* intersecção das diagonais $\overline{BE}$ e $\overline{AD}$. Como o triângulo *ABQ* é isósceles ($\hat{A}=72^{\circ}$, $\hat{B}=36^{\circ}$ e $\hat{Q}=72^{\circ}$), temos que *BQ=1*. Como não sabemos a medida do segmento $\overline{QE}$, vamos considerar *QE=x*.



Considere os triângulos *BDE* e *DEQ*:

→ no triângulo *BDE*, temos que $\hat{B}=36^{\circ}$, $\hat{D}=72^{\circ}$ e $\hat{E}=72$

→ no triângulo *DEQ,* temos que $\hat{D}=36^{\circ}$ e $\hat{E}=72^{\circ}$ e, consequentemente, $\hat{Q}=72^{\circ}$

Assim, *BDE* e *DEQ* são isósceles e semelhantes entre si.

Dessa forma, temos:

→ no triângulo *BDE*: *BD=EB=1+x* e *DE=1*

→ no triângulo *DEQ*: *DE=QD=1* e *EQ=x*

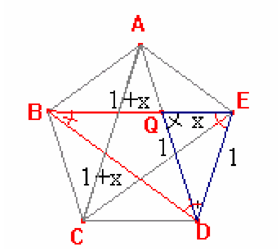


Fig. 38: *pentágono regular e suas propriedades*

Por semelhança de triângulos, temos que: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{1}{x}$, cuja solução positiva é $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Obtemos, assim, as seguintes proporções:

$$\frac{BE}{BQ}=\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1}=\frac{2}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\phi=1{,}618...$$

$$\frac{BQ}{QE}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\phi=1{,}618....$$

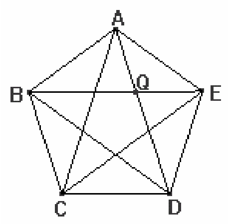


Fig. 39: *razões no pentágono regular*

Logo, Q divide a diagonal $\overline{BE}$ em média e extrema razão, ou seja, na razão áurea.

Ao seccionarmos o pentágono em suas diagonais, encontramos dois tipos de triângulo isósceles. Esses triângulos são denominados, por alguns autores, *triângulos áureos*. Em ambos, o lado menor é o segmento áureo do maior. Seus ângulos são múltiplos de 36°, sendo (36º,36º,108º) as medidas dos ângulos do triângulo áureo obtusângulo (*Fig. 40*) e (36º,72º,72º) as do triângulo áureo acutângulo (*Fig. 41*).

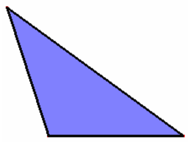


Fig. 40: *triângulo áureo obtusângulo*

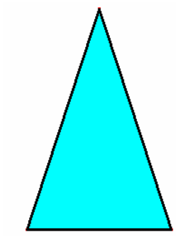


fig. 41: *triângulo áureo acutângulo*

A partir do triângulo áureo acutângulo, podemos obter uma espiral áurea (*Fig. 42*).

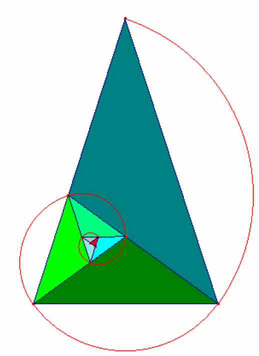


Fig. 42: *espiral áurea obtida a partir do triângulo áureo acutângulo*

2.5.3 As Peças das Pavimentações de Penrose: o Kite e o Dart

O kite é formado por dois triângulos áureos acutângulos, unidos por seus lados maiores (*Fig. 43*) e o dart por dois triângulos áureos obtusângulos, unidos por seus lados menores (*Fig. 44*).

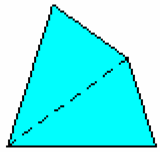


Fig. 43: *kite*

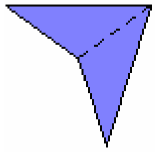


Fig. 44: *dart*

<u>Construção do kite e dart com régua e compasso</u>

Seja $\overline{AB}$ um dos lados de maior medida do kite e Q o ponto que divide $\overline{AB}$ na razão áurea. Então, $\overline{AQ}$ é o segmento áureo de $\overline{AB}$. Com o compasso podemos determinar o vértice C, pois $AC=AB$ e $BC=AQ$, e o vértice D, pois $AD=AB$ e $CD=AQ$ *(Fig. 45).*

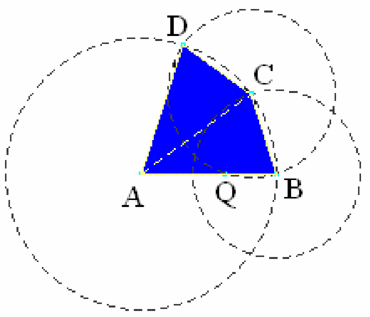


Fig. 45: *construção do kite*

Analogamente, sendo $\overline{EF}$ um dos lados de maior medida do dart e P o ponto que divide $\overline{EF}$ na razão áurea, podemos determinar o vértice G, pois $FG= EP=EG$, e o vértice H, pois $GH=EP$ e $EH=EF$ (*Fig. 46*).

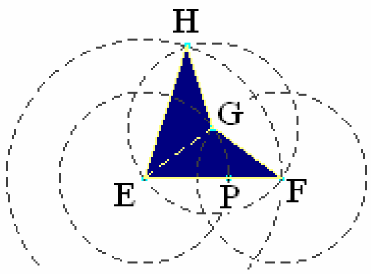


Fig. 46: *construção do dart*

Sendo $\phi=36^{\circ}$, as medidas dos ângulos das peças são:

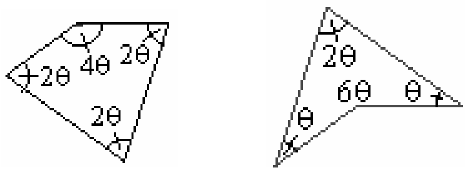


Fig. 47: *ângulos do kite e do dart*

Dos vários arranjos possíveis de se formar com kites e darts, ou combinando estas peças, apenas sete deles podem originam uma pavimentação aperiódica de Penrose (*Fig. 48*).

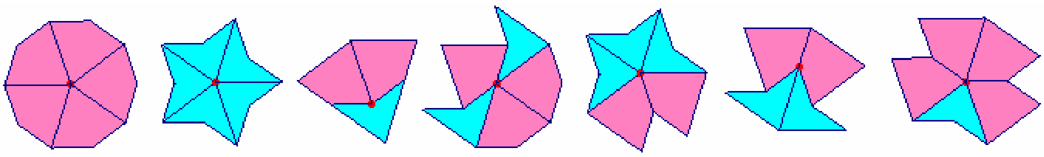


Fig. 48: *nós da pavimentação de Penrose*

Iniciando uma pavimentação pelo arranjo em forma de sol ou em forma de estrela, de modo que essa pavimentação sempre apresente simetria em relação a todos os eixos de simetria do arranjo inicial, à medida que as peças são acrescentadas, ou seja, que a pavimentação é inflacionada, mais a área pavimentada se aproxima da forma de um pentágono (GRUNBAUM & SHEPARD, 1989).

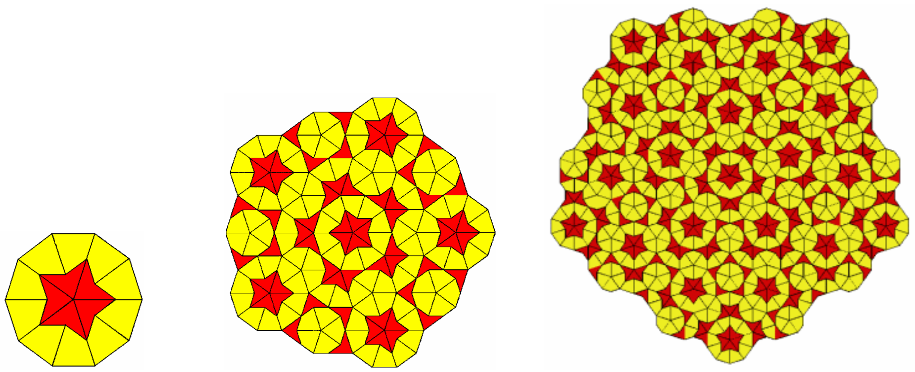


Fig. 49: *pavimentação de Penrose originada do arranjo em forma de sol*

A tarefa de pavimentar uma região pode tornar-se difícil, pois poderão ocorrer espaços em que não será possível encaixar nenhuma das peças. Uma forma de facilitar a construção da pavimentação é marcar os vértices das peças, de maneira que vértices iguais coincidam (*Fig.50*).

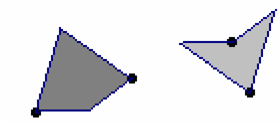


Fig. 50: *kite e dart com os vértices destacados*

Podemos, também, fazer curvas de cores diferentes nas peças, a fim de que, numa pavimentação, as curvas de uma peça se unam às curvas de mesma cor da peça adjacente. O ponto em que a curva intercepta o lado da peça o divide na razão áurea (*Fig.51*).

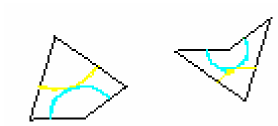


Fig. 51: *curvas feitas nas peças para facilitar o processo de pavimentação*

Numa pavimentação de Penrose, quanto maior a região pavimentada, mais a razão entre a quantidade de kites e darts aproxima-se da razão áurea. Em uma pavimentação infinita, essa razão é exatamente a razão áurea (GRUNBAUM & SHEPARD, 1989).

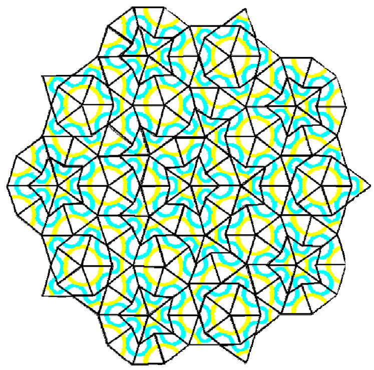


Fig. 52: *Pavimentação de Penrose*

2.6 Mosaicos Artísticos

Maurits Cornelis Escher utilizou, de modo muito criativo, as isometrias do plano para criar obras que impressionam pela criatividade e pelas relações que estabelecem entre a Matemática e a Arte. “Olhando os enigmas que nos rodeiam e ponderando e analisando as minhas observações, entro em contato com o mundo da matemática”, disse Escher.

As obras de arte desse holandês destacam-se pela forma com que são utilizadas as relações geométricas, proporcionando “movimento” às figuras, como na sua obra *day and night* (*Fig. 53)*:

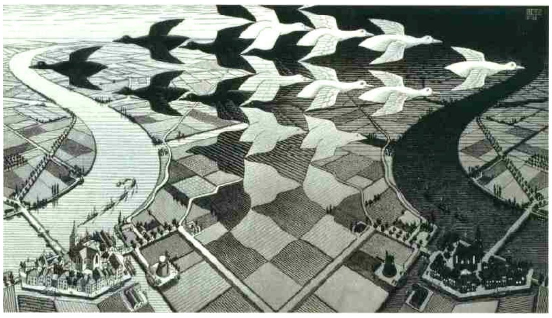


Fig. 53: *day and night*

Na figura seguinte, observamos a translação da imagem da face do artista cobrindo a superfície, sem que haja sobreposição das imagens ou lacunas entre elas. Surpreende a riqueza de detalhes utilizados por ele para que as imagens se “encaixem” perfeitamente.

Fig. 54: *obra de Escher*

Por meio da divisão regular do plano, podemos criar diversos padrões artísticos. Observe, na seqüência apresentada na figura *55*, o processo de deformação de um triângulo eqüilátero, mantendo-se a sua área, para a obtenção de um padrão.

Fig. 55: *seqüência para criação de um mosaico*
fonte: http://www.tessellations.org

Reproduzindo a figura chave, ajustando-as devidamente por meio de movimentos de translação ou rotação, obtém-se o seguinte mosaico:

Fig. 56: *mosaico*
fonte: http://www.tessellations.org

A próxima ilustração (*Fig. 57*) apresenta um mosaico obtido pela deformação das peças que compõem as pavimentações de Penrose:

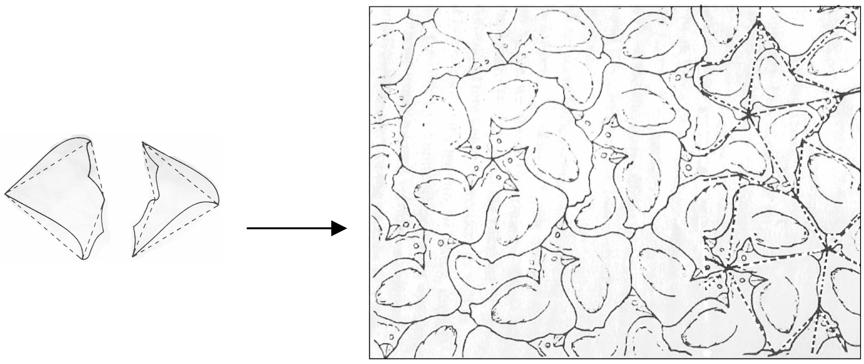


Fig. 57: *pavimentação obtida pela deformação do kite e dart*

Martins (2003) apresenta, em seu estudo, padrões ornamentais para caleidoscópios, obtidos por meio de pequenas alterações (modificações e/ou complementações) feitas no interior das bases caleidoscópicas que geram pavimentações do plano por polígonos regulares. A autora, também, propõe um jogo de tesselação espacial, no qual as faces dos poliedros possuem diferentes porções de padrões ornamentais (Fig 58).

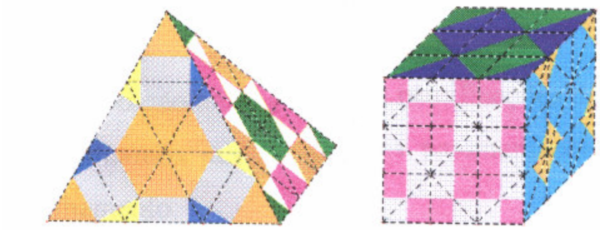


Fig. 58*: poliedros com padrões ornamentais em suas faces*

Nos trabalhos apresentados, podemos notar que são muitas as possibilidades de criação. Com criatividade e ousadia, é possível criar diversos mosaicos. Destaca-se importância da visualização e da percepção do espaço na criação desses trabalhos, bem como se percebe a forte relação entre Arte e Geometria.

Diversas iniciativas têm surgido no intuito de ressaltar essa intima ligação entre Matemática e Arte. Dentre elas podemos citar, também, o projeto “Arte & Matemática”[6] da TV Cultura, no qual o professor Luiz Barco, da Escola de Comunicações e Artes da Universidade de São Paulo (USP), dedica especial atenção para as relações entre essas áreas de conhecimento.

A Arte propicia o desenvolvimento do pensamento artístico, que caracteriza um modo próprio de dar sentido e ordenar as experiências, o que favorece a sua articulação com as outras disciplinas do currículo, auxiliando, por exemplo, o desenvolvimento de estratégias para resolver um problema. A Arte, em suas especificidades, está diretamente relacionada com todas as formas de criação humana e respectivas expressões, como ocorre, por exemplo, na literatura e nas ciências em geral, inclusive nas ciências exatas e, portanto, na Matemática, já que, ao exercitar continuamente a imaginação do aprendiz, ela abre possibilidades para que ele veja caminhos para resolver uma situação que pode envolver o raciocínio matemático.

“A arte é uma possibilidade do ser-no-mundo de desvelar um horizonte de significados, de criar para si um lugar o qual habita” (ARANHA, 1981, p.12). A Matemática também responde a essa necessidade humana de busca de significações.

---

[6] Mais informações em: http://www.tvcultura.com.br/artematematica/home.html

2.7 O Software *Cabri-Géomètre II*

O Cabri (*Cabri-Géomètre II*) é um programa de geometria dinâmica que possibilita realizar construções geométricas, muitas vezes, de modo mais rápido e preciso do que com a régua e compasso tradicionais. Além disso, permite realizar modificação nas construções realizadas, por meio do deslocamento de seus elementos. Essa característica do software possibilita a análise das propriedades que se mantém invariantes em determinadas figuras geométricas.

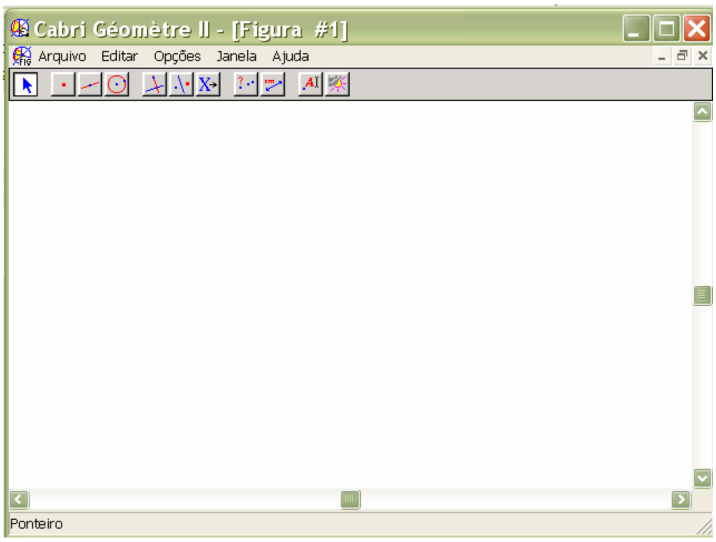


Fig. 59: *tela inicial do software Cabri*

Com esse software de geometria dinâmica, é possível formular e testar conjecturas, visualizar propriedades, formar relações, compreender e estabelecer propriedades geométricas.

Nos encontros que realizamos com os professores-alunos, o software *Cabri-Géomètre II* foi utilizado para construir algumas bases caleidoscópicas e gerar pavimentações, que também poderiam ser feitas com régua e compasso.

Utilizando a ferramenta *Macro*, podemos pavimentar uma região de maneira muito fácil, baseados na idéia de visualização em caleidoscópios: construímos uma *Macro* que gera bases caleidoscópicas, fazemos uma malha apropriada de triângulos (ou quadrados) e aplicamos a macro em todos os polígonos dessa malha, pavimentando-a. A figura *60* apresenta uma base eqüilátera para visualização da pavimentação (6,6,6) construída com a ferramenta a *macro*, uma malha de triângulos eqüiláteros e a pavimentação obtida. Mais informações sobre a construção das bases e o uso da ferramenta *Macro* podem ser obtidas nos trabalhos de Murari (1995), Almeida (2003), Martins (2003) Batistela (2005) e Gouveia (2005).

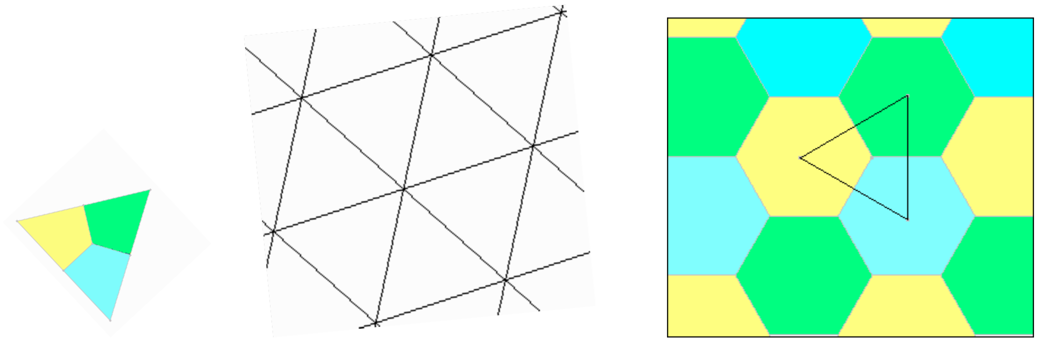


Fig. 60: *base eqüilátera para pavimentação (6,6,6), malha de triângulos eqüiláteros e pavimentação obtida aplicando-se a macros nos triângulos da malha*

Nossa intenção ao utilizar o software nos encontros com os professores-alunos foi explorar o laboratório de informática, por acreditamos que o contato com esse software, disponível para as escolas públicas, pode estimular o uso do mesmo em atividades educacionais, em sala de aula.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais colocam como mais um desafio para a escola o de incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na escrita e na oralidade, novas formas de comunicar e conhecer, por meio das tecnologias. Borba & Penteado (2003) advertem que lançar mão dos recursos da tecnologia não implica o abandono de outros recursos – como giz, lápis e papel. É preciso avaliar quando um recurso é mais adequado para os propósitos almejados, de forma a voltar-se para a expansão de possibilidades de ensino e de formação do aluno.

Vale ressaltar, aqui, uma iniciativa da Secretária de Educação do Estado de São Paulo de capacitação de professores de **Matemática** e **Arte** para o uso desse software em atividades com alunos. A oficina é denominada **Cabrincando com Geometria**[7].

[7] Informações em: www.fde.sp.gov.br/subpages/RevistaAcesso/acesso15/oficinas.htm

CAPÍTULO 3: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E CONTEXTO DA PESQUISA

3.1 Pesquisa Qualitativa: Abordagem Fenomenológica

Ao admitirmos que o foco de nosso estudo traz em si aspectos da subjetividade de cada sujeito e também os sentidos e significados que se constituíram durante a realização dos encontros, compreendemos a impossibilidade de abordá-lo quantitativamente.

Os fenômenos humanos, devido à sua complexidade, não se prestam a serem tratados como um sistema de variáveis passíveis de serem descritas e manipuladas, a fim de prever o que ocorrerá com os sujeitos em determinadas situações similares.

A insatisfação dos pesquisadores das ciências humanas em relação aos procedimentos considerados "confiáveis" pelo paradigma positivista, procedimentos esses enquadrados na abordagem empírico-analítica, a qual segue passos determinados para a coleta e análise dos dados, primordialmente quantitativos, por meio de análises estatísticas e de medições, levou à emergência de uma nova forma de pesquisar: a investigação qualitativa, que "tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes" (D'AMBRÓSIO, 2004, p.12).

A pesquisa qualitativa está voltada para os significados que as pessoas atribuem ao fenômeno investigado.

> Há sempre um sujeito, em uma situação, vivenciando o fenômeno. Por vivência é entendido, também, experiência, mas é a experiência percebida de modo consciente por aquele que a executa. Essa experiência também é denominada *experencial*. Possui característicos constitutivos, como tempo em que se realiza, impressões, duração, está sempre sendo dirigida para alguma coisa, nunca é estática, há sempre uma relação entre o fenômeno que se mostra e o sujeito que experiencia. (MARTINS & BICUDO, 1988, p. 75)

Araújo & Borba (2004) explicam que a metodologia de pesquisa é uma interface que engloba pergunta, referencial teórico e métodos que devem estar em consonância com a visão de mundo do pesquisador, pois esta "harmonia" possibilita que as etapas da pesquisa se complementem de forma que a amplitude do estudo possa ser assegurada.

Em nosso estudo, assumimos a fenomenologia como opção metodológica para a organização e análise dos dados. Nos dizeres de Joel Martins,

> a Fenomenologia é, neste século XX, principalmente, um nome que se dá a um movimento cujo objetivo precípuo é a investigação direta e a descrição de fenômenos que são experienciados pela consciência, sem teoria sobre a

> sua explicação causal e tão livre quanto possível de pressupostos e de pré-conceitos. (MARTINS, 1992, p.50)

Aqui, o termo consciência "refere-se a um estado de alerta para o mundo" (MARTINS, 1992, p. 56). Consciência é intencionalidade. É um voltar-se para, intencionalmente.

A pesquisa fenomenológica trabalha com a descrição da percepção dos objetos percebidos. Ela

> está dirigida para *significados, ou seja, para expressões claras sobre as percepções que o sujeito tem daquilo* que está sendo pesquisado, as quais são expressas pelo próprio sujeito que as percebe. Ao se concentrar nos significados, o pesquisador não está preocupado com fatos, mas com o que os eventos significam para os sujeitos da pesquisa. (MARTINS & BICUDO, 1988, p.93)

O pesquisador fenomenólogo organiza descrições da experiência vivenciada pelos sujeitos de seu estudo, direcionando seus esforços na tentativa de compreender o que se mostra ao seu olhar interrogativo. Não há pressuposições antecipadas nem hipóteses a serem comprovadas. É no campo, ao estar com seus sujeitos, que o pesquisador obtém seus dados e caminha em direção à análise, orientado pela questão diretriz da investigação.

> [...] a interrogação, o interrogado, o pesquisador e a investigação, fundem-se em um só organismo, que constitui o seu próprio movimento. Isto dá dignidade à interrogação e à investigação. E coloca a interrogação, que brota do interrogado sob o olhar do pesquisador, a serviço da investigação, que tem como proposta iluminar a pergunta abrindo horizontes. (KLUTH, 2001, p. 75)

Guiado por sua interrogação, o pesquisador busca compreender a experiência vivenciada pelos sujeitos de sua pesquisa, voltando-se também sobre a sua própria vivência. Mesmo sabendo da impossibilidade de abranger todas as dimensões de possíveis manifestações do fenômeno investigado, o pesquisador busca andar ao seu redor, cercando, percebendo, refletindo e vislumbrando as perspectivas em que ele se doa ao seu olhar interrogativo, a fim de compreender a abertura na qual ele se insere.

O pesquisador busca a originalidade da experiência para cada sujeito, numa trajetória que cuida das manifestações que fazem sentido para a interrogação, caminhando no movimento de análise e reflexão, buscando um sentido geral para o que está compreendendo e interpretando. Sabendo que escolhas do que relatar são influenciadas por sua visão de mundo, ele, em uma postura de rigor, explicita suas tomadas de posição, podendo efetuar uma auto-compreensão, contextualizando suas análises e interpretações.

Os procedimentos fenomenológicos não pretendem legitimar ou generalizar conclusões. Almejam uma abordagem interpretativa dos dados, enfatizando a explicitação dos significados e percepção aguçada do sentido.

Esta abordagem inicia-se por um estágio de clareamento, no qual o pesquisador busca, nas suas descrições, unidades que considera significativas para a elucidação do fenômeno, focando as idéias presentes nas manifestações ingênuas[8] dos sujeitos, articulando as compreensões dos dados que tem em mãos.

Por meio de um trabalho de redução[9], caminha na direção dos significados que se mantém no movimento de efetuar convergências, expondo aqueles que se mostram invariantes e discorrendo sobre os que permanecem singulares. Esse movimento, realizado pelo pesquisador, busca transcender a análise dos individuais, partindo para uma compreensão totalizante, não generalizante, do fenômeno focado.

Em nosso estudo, as descrições referem-se às experiências de ensino e de aprendizagem ocorridas nos encontros com os professores-alunos, quando ficamos atentos às falas, opiniões, expectativas, gestos, interações, decepções, dúvidas e questionamentos que emergiram nessa experiência.

Lançamos nosso olhar para os encontros, buscando descrevê-los livres de interpretações ou julgamentos prévios, com a finalidade de compreender o fenômeno na forma como ele se nos mostrou.

A partir dessas descrições e guiados pela interrogação *"Quais significados os professores de Matemática e de Arte atribuem ao trabalho com pavimentações do plano, envolvendo material manipulativo, em situação de ensino e aprendizagem?"*, buscamos compreender a experiência vivenciada ao estarmos junto com os professores-alunos, apresentando, discutindo e explorando atividades em pavimentação do plano para o ensino de geometria nas séries finais do Ensino Fundamental.

3.2 Os Sujeitos

Falar dos professores-alunos, sujeitos dessa pesquisa, remete-nos ao pensar sobre as indagações surgidas no ambiente escolar, estando com eles, e que influenciaram a realização dessa pesquisa.

---

[8] Ingênua refere-se a uma atitude espontânea.
[9] Sobre a redução fenomenológica ver Bicudo (1999).

Como professora de Matemática de uma das escolas da Rede onde lecionam os professores-alunos, pudemos constatar não somente os problemas relacionados ao ensino de geometria, mas também as dificuldades encontradas na prática escolar do professor e a sua busca por soluções efetivas. Nas conversas com os professores da mesma área, notamos que o ensino de geometria tornava-se limitado, muitas vezes, devido à falta de recursos e à dificuldade para abordá-lo.

Uma situação comum nesse ambiente escolar chamava nossa atenção: durante o intervalo ou nas aulas vagas, a conversa dos professores versava sobre sua prática e possibilitava a troca de experiências, gerando expectativas com a possibilidade de realizar ações conjuntas, envolvendo, inclusive, professores de áreas distintas.

Juntamente com uma professora de Arte (que lecionava conosco numa mesma escola), conversávamos sobre a possibilidade de realizar um trabalho em sala de aula envolvendo as duas disciplinas, usando, por exemplo, o tangran ou maquetes. Porém, os planos se limitavam às nossas conversas, pois a preocupação com o conteúdo e a falta de um momento para preparação conjunta das ações, entre outros fatores, resultavam nessa inércia.

Nossa vivência nesse ambiente escolar influenciou nossa decisão de convidar nossos colegas de profissão para participarem dos encontros: os professores de Matemática e de Arte da rede municipal de ensino da cidade de Araraquara, em efetiva função no ensino fundamental de quinta a oitava séries. Dos convidados, oito professores de Matemática e quatro de Arte realizaram o curso que oferecemos.

A fim de traçarmos um perfil dos sujeitos de nosso estudo, enviamos para cada professor-aluno, uma semana antes do início dos encontros, um questionário indagando sobre sua formação, sua carga horária de trabalho e seu interesse em participar do curso. Com as repostas obtidas e com os dados da auto-avaliação realizada no fim do curso, apresentamos, a seguir, uma sucinta descrição dos sujeitos de nossa pesquisa.

Cada professor-aluno será identificado pela letra inicial da disciplina que leciona seguida por um número de 1 a 12. Por exemplo, M1 identifica o professor-aluno de Matemática um e A3 o professor-aluno de Arte três.

Com exceção de duas professoras-alunas, todos atuam em outra atividade educacional ou em outra Rede de ensino. A carga horária semanal desses professores varia de 39 a 60 horas no ambiente escolar, sendo que a média é de 49 horas. Todos são professores efetivos na Rede Municipal de Ensino.

Professora-aluna M1

Atua apenas na Rede Municipal de Ensino e tem carga horária de 40 aulas semanais. Formou-se em 1998 e leciona há cinco anos.

O principal motivo para participação nos encontros foi "adquirir novas experiências e conhecimento mais amplo para ensinar geometria".

Recorria à pesquisadora, quando julgava necessário, para esclarecer dúvidas e fazer comentários. Em sua avaliação final, falou da dificuldade do professor de Matemática para apresentar suas idéias na forma escrita.

Professora-aluna M2

É professora efetiva nas Redes Municipal e Estadual de Ensino. Sua carga horária no magistério é de 58 aulas semanais. Formou-se em 2001 e leciona há seis anos.

Interessou-se pelo curso para "aprender a utilizar materiais alternativos".

Geralmente, terminava as atividades propostas nos encontros mais rapidamente que os outros. Considera-se "muito objetiva". Durante as atividades, quando achava necessário, apresentava-nos suas dúvidas com relação ao enunciado e soluções das atividades, alertando para os problemas de interpretação, que poderiam ocorrer em sala de aula, junto aos alunos. Raramente se manifestava nas discussões gerais que envolviam todo o grupo. Contudo, estava sempre discutindo, com os colegas mais próximos, sobre as atividades e assuntos relacionados à prática.

Professora-aluna A3

Atua na Rede Municipal e na Estadual, sendo efetiva em ambas. Sua carga horária no magistério é de 55 aulas semanais. Formou-se em 1993 e leciona há dez anos.

Interessou-se em participar do curso para "fundamentar alguns conceitos".

Era muito comunicativa e nas discussões gerais sempre se manifestava, expondo suas opiniões e conclusões para o grupo.

Professor-aluno M4

Formou-se em 1993 e leciona há treze anos. Sua carga horária semanal na Rede Municipal é de 40 aulas. Além disso, atua em um centro de formação de condutores.

Desejava "aprender a trabalhar com material concreto".

Quando tinha dúvidas com relação às atividades, solicitava auxílio à pesquisadora. Estava sempre discutindo com o seu grupo durante os encontros.

Professora-aluna M5

Com carga horária de 40 aulas semanais, essa professora atua apenas na Rede Municipal de Ensino. Formou-se em 1999 e leciona há sete anos.

O principal motivo para participar dos encontros foi o desejo de se "atualizar, aprender e conhecer software de geometria para melhorar suas aulas".

Concomitantemente aos encontros, realizava um curso de especialização. Geralmente, discutia com a pesquisadora as atividades que desenvolvia nesse curso.

Professora-aluna M6

Exerce atividades nas Redes Municipal e Estadual. Sua carga horária no magistério é de 53 aulas semanais. Formou-se em Estatística em 1993 e fez complementação pedagógica para poder lecionar na rede pública. Leciona há seis anos.

O desejo de "aprimorar" seus conhecimentos e "acrescentar novas idéias para o desenvolvimento da geometria em sala de aula" levou-a a participar dos encontros.

Com freqüência, manifestava suas dúvidas e opiniões nas discussões coletivas. Foi possível notar a sua preocupação em apresentar aos seus alunos situações conteúdos relacionados ao cotidiano e que tivessem utilidade prática para eles.

Professor-aluno M7

É professor efetivo nas Redes Municipal e Estadual. Sua carga horária no magistério é de 54 aulas semanais. Formou-se em 1998 e leciona há dezoito anos.

Interessou-se em participar dos encontros para "aprender um pouco mais do conteúdo aplicado". Viu no curso "uma grande oportunidade para os professores da área trocarem informações e conhecimentos".

Durante os encontros, estava sempre preocupado com o rigor matemático das atividades e buscava demonstrações mais formais que as solicitadas. Muito comunicativo, expunhas suas idéias e dúvidas nas discussões gerais, analisando e compartilhando com os colegas as soluções que encontrava, auxiliando-os quando solicitavam.

Professora-aluna A8

Atua nas Redes Municipal e Estadual. Sua carga horária semanal é de 48 horas-aula. Formou-se em 1991 e leciona há dezesseis anos.

Interessou-se em participar dos encontros por desejar "trabalhar atividades que tragam maior conhecimento sobre o assunto e poder usá-las em sala de aula".

Era muito comunicativa e nos encontros compartilhava seu conhecimento artístico com os participantes da área de Matemática. Durante a discussão das atividades, expunha suas soluções, justificando-as, a fim de analisá-las junto ao grupo. Declarou que gostava muito de Matemática e que, antes de ingressar no curso de Arte, pretendia seguir a Licenciatura em Matemática.

Professora-aluna M9

Atua no magistério das Redes Municipal e Estadual, com carga horária de 60 aulas semanais. Formou-se em 1980 e leciona há dezoito anos.

O interesse em participar dos encontros se originou do desejo de "trabalhar uma geometria atraente para os alunos".

Nas discussões gerais, participava ativamente, fazendo comentários e apresentando sugestões.

Professora-aluna A10

Desempenha as funções de professora na Rede Municipal e de diretora em uma escola da Rede Estadual. Sua carga horária semanal de atividades é de 60 horas. Formou-se em 1991 e leciona há quinze anos.

Desejava "conhecer outras formas de ensinar geometria".

Nos encontros, falava pouco, mas seus comentários eram ricos em informações sobre sua disciplina e sua prática. Geralmente, nas discussões coletivas ela não se manifestava. A todo momento estava fazendo algo, como cortando e colando figuras para decorar seu material.

Professora-aluna A11

Exerce suas atividades de ensino somente na Rede Municipal. Sua carga horária no magistério é de 35 aulas semanais. Formou-se em 2000 e leciona há três anos.

Teve interesse em participar dos encontros para "ampliar seu conhecimento" sobre a geometria.

Habitualmente, não se manifestava durante as discussões gerais, porém, quando julgava necessário, solicitava a presença da pesquisadora para tirar dúvidas e fazer comentários.

Professora-aluna M12

Essa professora atua na Rede municipal e na Particular. Sua carga horária é de 50 aulas semanais. Formou-se em 2000, leciona há três anos no Ensino Infantil e passou, também, a trabalhar com alunos do Ensino Fundamental de quinta a oitavas séries.

Desejava obter “mais noção e habilidades para trabalhar com a geometria”.

Normalmente, não se manifestava nas discussões gerais. Quando julgava necessário, solicitava auxílio da pesquisadora ou dos colegas. Por ter lecionado no Ensino Infantil, já havia tido contato com diversos materiais manipulativos.

Ao traçamos um breve perfil dos professores-alunos, buscamos mencionar suas considerações quanto aos motivos que os levaram a participar dos encontros, dentre outros que podem não ter sido manifestados em suas respostas. Chamou-nos a atenção as expectativas e os anseios dos professores-alunos em relação ao curso, na busca por caminhos diversificados para abordar a geometria em suas aulas.

3.3 A Rede de Ensino e a Divulgação do Curso

Para obtenção dos dados desta pesquisa, foi realizado um curso de extensão, intitulado *Recreações Geométricas em Pavimentação do Plano no ensino de Geometria*, com carga-horária de 32h. A instituição promotora foi a Universidade Estadual Paulista – campus de Rio Claro – e o responsável pelo curso foi o professor doutor Claudemir Murari, orientador desta pesquisa. Os encontros foram realizados em uma das escolas da Rede Municipal de Ensino da cidade de Araraquara.

A escolha dessa Rede para a realização de nosso estudo se justificou não somente pela facilidade de acesso que teríamos para a realização dos encontros, mas, como explicamos, por ter sido nesse ambiente que constatamos a ausência da geometria nos planejamentos de início de ano e percebemos as dificuldades relacionadas à metodologia didática e à falta de recursos materiais diversificados, bem como formas de utilização dos recursos disponíveis, como a informática.

Dentre as escolas dessa Rede, seis delas atendem alunos de quinta a oitava séries. Elas estão localizadas em bairros periféricos ou na zona rural.

Quanto à estrutura física das escolas, as instalações são novas e estão em bom estado de conservação. Além disso, todas elas possuem um amplo laboratório de informática, no qual os alunos realizam atividades semanalmente. Há uma pessoa responsável pela sala que faz a manutenção dos micros e auxilia os professores no desenvolvimento das atividades. Porém, cabe ressaltar que não havia nenhum tipo de software de geometria dinâmica instalado nos micros, até o início dos encontros, apesar de a maioria dos professores conhecerem o software *Cabri-Géomètre II*.

Todas as escolas possuem uma sala de vídeo com aparelhos em boas condições de manutenção e que são usados, frequentemente, pelos professores em suas aulas. Em cada escola há um professor integrador que tem a função de auxiliar outros professores e de acompanhar alunos com dificuldades.

Nas conversas com os professores-alunos, pudemos constatar que consideram que as escolas do município oferecem boas condições para desenvolverem suas atividades, como infra-estrutura, número reduzido de alunos por sala e ajuda de outro professor. É importante destacar que não temos a intenção de avaliar a Rede de Ensino na qual os sujeitos dessa pesquisa lecionam, nem julgar a pedagogia adotada por ela. Procuramos apenas, por meio desta descrição, situar o leitor com relação ao ambiente de trabalho dos professores-alunos, no qual os encontros se realizaram.

A divulgação do curso para os professores da Rede foi realizada por meio da secretaria de cada escola, na qual deixamos um cartaz informativo e uma ficha de inscrição individual, que deveria ser preenchida pelos interessados em participar. Nesse cartaz constava que os participantes receberiam certificado expedido pela UNESP, o que ocorreu quatro meses após o término do curso.

A oportunidade de participação foi oferecida a todos os professores de Matemática e de Arte, em efetivo exercício, que estivessem trabalhando com alunos das séries finais do Ensino Fundamental (quinta a oitavas séries). Ao todo, quinze professores se inscreveram, mas somente os doze professores-alunos, apresentados anteriormente, iniciaram e concluíram o curso.

Chamou nossa atenção o fato de professoras das séries do primeiro ciclo desejarem participar, justamente por se tratar do ensino de geometria. Devido aos objetivos do nosso estudo, isso não foi possível. Deixamos apenas a possibilidade de estarmos retornando com atividades apropriadas para as séries em que lecionam.

Apesar de conseguirmos realizar a divulgação do curso e a inscrição dos interessados com sucesso, o percurso realizado para que os encontros viessem a acontecer não foi simples. No início de nossa pesquisa, no momento de elaboração das atividades, entramos em contato com a Secretaria de Educação do município considerado, para solicitar autorização para realizar nosso estudo na Rede Municipal de Ensino. A pessoa responsável nos atendeu com muita dedicação, respondendo afirmativamente e colocando-se à nossa disposição. Tranqüilos, combinamos de retornar no fim do mesmo ano para tratar das questões burocráticas. Porém, quando retornamos, em dezembro, a pessoa que nos atendeu anteriormente havia se aposentado e, em virtude das eleições municipais ocorridas nesse ano, houve muitas mudanças na Secretaria de Educação, sendo que, até o mês de janeiro do ano seguinte, não havia ninguém exercendo aquela função.

Dirigimo-nos, por diversas vezes, até a Secretaria a fim de explicar que tínhamos uma data pré-estabelecida para a realização dos encontros, e que precisávamos de autorização para divulgar o curso nas escolas. Somente na segunda quinzena de fevereiro, fomos recebidos pelo novo coordenador de projetos de formação, que autorizou a realização do curso e nos orientou a respeito dos procedimentos necessários junto à Secretaria de Ensino. Em seguida, conversamos com a diretora do Centro de Formação para resolver questões relativas ao local e aos recursos necessários para a realização dos encontros. Ela também nos forneceu uma lista com os nomes das escolas e dos professores de Matemática e Arte que atuavam na Rede.

"Corremos contra o tempo" para divulgar o curso e recolher as inscrições no prazo especificado pela Secretaria da UNESP de Rio Claro. A diretora de uma das escolas foi muito prestativa e se propôs a ajudar-nos na divulgação nas demais escolas, pois eram distantes umas das outras, algumas localizadas em assentamentos afastados até 30 km da cidade.

Apesar das dificuldades enfrentadas, a receptividade das pessoas que nos auxiliaram e o retorno positivo dos professores-alunos fizeram com que nosso entusiasmo se fortalecesse e nos impeliram à concretização do curso.

3.4 Sobre os Encontros

Foram realizados sete encontros semanais, aos sábados pela manhã, em uma das escolas da rede, que funcionava nos fins de semana para a realização de atividades comunitárias.

Os encontros não tinham uma forma estruturada e o tempo não era controlado com precisão, visando maior abertura às manifestações dos professores-alunos. Nossa intenção era privilegiar o diálogo e a participação. Desejávamos criar um espaço de interação contínua entre os distintos horizontes de compreensão, e respectivas intencionalidades dos participantes, que possibilitasse a troca de experiências.

Víamos o professor como um produtor de conhecimento sobre sua prática e considerávamos que este conhecimento enriqueceria os encontros e as atividades. Dessa forma, voltamos nosso olhar para o processo de formação e não para o conteúdo matemático em si.

Como pesquisadora, éramos mais um elemento do grupo, ensinando, aprendendo, esclarecendo dúvidas, trocando idéias e orientando os professores no desenvolvimento das atividades. Nossas experiências no magistério nos proporcionaram uma afinidade e posição de igualdade com os professores-alunos. Dessa forma, nossa presença era como a de mais uma professora que vivenciou a experiência de lecionar na mesma Rede de Ensino que eles.

No momento em que o orientador desta pesquisa explicava para o grupo os conceitos e propriedades relacionados ao material utilizado ou às atividades, empenhávamo-nos nas observações de campo. Também, no decorrer dos encontros, participávamos das discussões entre os presentes e fazíamos anotações das situações que considerávamos relevantes para o nosso estudo.

Na medida em que os encontros foram se realizando, nossa apreensão inicial, com relação à recepção do nosso trabalho pelos professores-alunos, deu lugar a um sentimento de companheirismo e troca mútua, que aumentou nossas expectativas de bons resultados com relação ao curso. O receio cedeu espaço para uma relação de aceitação, familiaridade e confiança.

<u>A Dinâmica dos Encontros</u>

No primeiro encontro, ao entrarem na sala, os professores-alunos se acomodaram em três grupos. Porém, dois grupos que estavam muito próximos acabaram se fundindo em um só. Eles ficaram dispostos da seguinte forma:

- Grupo maior: M1, M2, M6, M7, M9, A3, A8 e A10.
- Grupo menor: M4, M5, M12 e A11.

Dentre os participantes, M1, M2 e A3 trabalhavam na mesma escola da Rede Municipal em que lecionamos.

De forma geral, os professores-alunos que atuavam nas mesmas escolas sentavam-se próximos, para desenvolverem as atividades. Com o decorrer dos encontros, as três professoras de Arte do grupo maior passaram a desenvolver as atividades juntas.

Tivemos, também, a presença de uma pedagoga que pediu para participar do curso como ouvinte, por indicação do coordenador do centro de formação da Secretaria de Educação. Ela esteve presente na maioria dos encontros e desenvolvia as atividades no grupo menor. Manifestava-se pouco, o suficiente para afirmar: "não gosto de geometria!". No segundo encontro, outra pessoa pediu permissão para freqüentar o curso: o noivo de A3, que era estudante de Arte. Ele, também, se manifestava muito pouco.

Antes do início das atividades, distribuíamos para os grupos o material que seria utilizado no encontro. Em geral, eles faziam uso do material manipulativo, mesmo quando não fosse imprescindível para o desenvolvimento da atividade. Por meio da manipulação das peças, os professores-alunos faziam conjecturas e discutiam os resultados encontrados.

As dúvidas mais comuns dos professores-alunos eram relativas à interpretação do enunciado de algumas atividades. Quando julgavam necessário, solicitavam auxílio da pesquisadora ou do professor-orientador[10]. Em geral, os professores-alunos projetavam os assuntos tratados para suas salas de aula, fazendo comentários relativos às dificuldades que seus alunos poderiam apresentar.

Após a resolução das atividades, o professor-orientador realizava uma explicação geral sobre os conceitos geométricos envolvidos, enfatizando as possibilidades de uso dos materiais no ensino de geometria. Os professores-alunos participavam questionando, fazendo comentários e dando sugestões.

No final de quase todos os encontros, íamos para a sala de informática desenvolver atividades no *Cabri-Géomètre II*. Geralmente, os professores-alunos sentavam-se em duplas para realizar as atividades propostas.

É importante destacar que as professoras de Arte não apresentaram dificuldades na compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos nas atividades. Neste aspecto, era impossível diferenciar quais eram os professores-alunos de Matemática ou de Arte. A distinção entre esses especialistas se evidenciava nas representações das soluções das atividades, sendo muito mais coloridas aquelas apresentadas pelas professoras-alunas de Arte.

O clima de amizade estabelecido no decorrer dos encontros foi muito importante para que todos se sentissem à vontade para expressarem-se.

De modo geral, alguns professores faziam muitos comentários nas discussões coletivas, destacando-se nas descrições que realizamos para as análises posteriores. Outros se manifestavam com menos freqüência ou discutiam diretamente com a pesquisadora. Na apresentação dos dados, realizada no capítulo seguinte deste estudo, será possível distinguir os diferentes comportamentos.

---

[10] Professor doutor Claudemir Murari, orientador desta pesquisa e responsável pelo curso.

A curta duração do curso, e, portanto dos encontros, não possibilitou uma exploração muito ampla do material utilizado nas atividades. Cada participante tinha um ritmo diferente e não era nossa intenção fixar um intervalo de tempo para o desenvolvimento das ações. Também, não foi possível confeccionar as peças das pavimentações junto com os professores-alunos, para que cada um recebesse seu próprio exemplar. Porém, eles receberam, por escrito, as instruções sobre como proceder para a confecção delas.

Questões Éticas

Concordamos com Bogdan & Biklen (1994) com relação aos procedimentos necessários à realização de uma pesquisa: o pesquisador deve incluir cuidados éticos que protejam a exposição dos sujeitos, explicitando suas intenções e buscando o seu consentimento, informando, para isso, os rumos que o estudo pretende seguir. Dessa forma, informamos aos professores-alunos sobre nossas intenções com relação ao curso e sobre o trabalho de mestrado que estávamos realizando. Também, solicitamos permissão para filmar os encontros e nos comprometemos em manter sigilo com relação à identificação dos participantes, por meio de um termo de compromisso firmado, por escrito, com cada um deles.

Temas dos Encontros

De forma sucinta, descreveremos o que foi tratado em cada encontro, bem como o material utilizado:

PRIMEIRO ENCONTRO (E1): Foram desenvolvidas atividades envolvendo conceitos fundamentais em geometria e polígonos. Utilizamos canudinhos, barbante, tesoura, espelhos articulados e tiras de cartolina.

SEGUNDO ENCONTRO (E2): Foram desenvolvidas atividades envolvendo simetria e visualização em espelhos articulados. Utilizamos espelhos planos, caleidoscópio de dois espelhos, régua, tiras de cartolina e bases caleidoscópicas.

TERCEIRO ENCONTRO (E3): As atividades desenvolvidas abordavam as pavimentações uniformes do plano. Foi utilizado o kit-polígonos, por meio do qual deveriam ser encontrados alguns arranjos, a fim de identificar aqueles que pavimentam o plano uniformemente.

QUARTO ENCONTRO (E4): Confeccionamos os caleidoscópios modificados junto com os professores-alunos. Levamos todo o material necessário (espelhos, cola de sapateiro, emborrachado e estiletes) para a confecção dos caleidoscópios modificados, dos quais cada um receberia um exemplar. Realizamos atividades com os espelhos articulados e fizemos construções no *Cabri-Géomètre II*.

QUINTO ENCONTRO (E5): Com régua e compasso, os professores construíram, e depois pintaram, as bases caleidoscópicas para visualização de pavimentações por triângulos eqüiláteros. Também foram desenvolvidas atividades nas quais se discutiu sobre simetrias.

SEXTO ENCONTRO (E6): Realizamos atividades com tetraminós. Utilizamos papel quadriculado para representação das soluções, quadrados unitários e tetraminós feitos em material emborrachado (e.v.a) e papel cartão.

SÉTIMO ENCONTRO (E7): Nas atividades desse encontro, abordamos as pavimentações aperiódicas de Penrose e a razão áurea. Foram utilizadas peças feitas em papel cartão, por meio das quais os professores-alunos construíram as pavimentações.

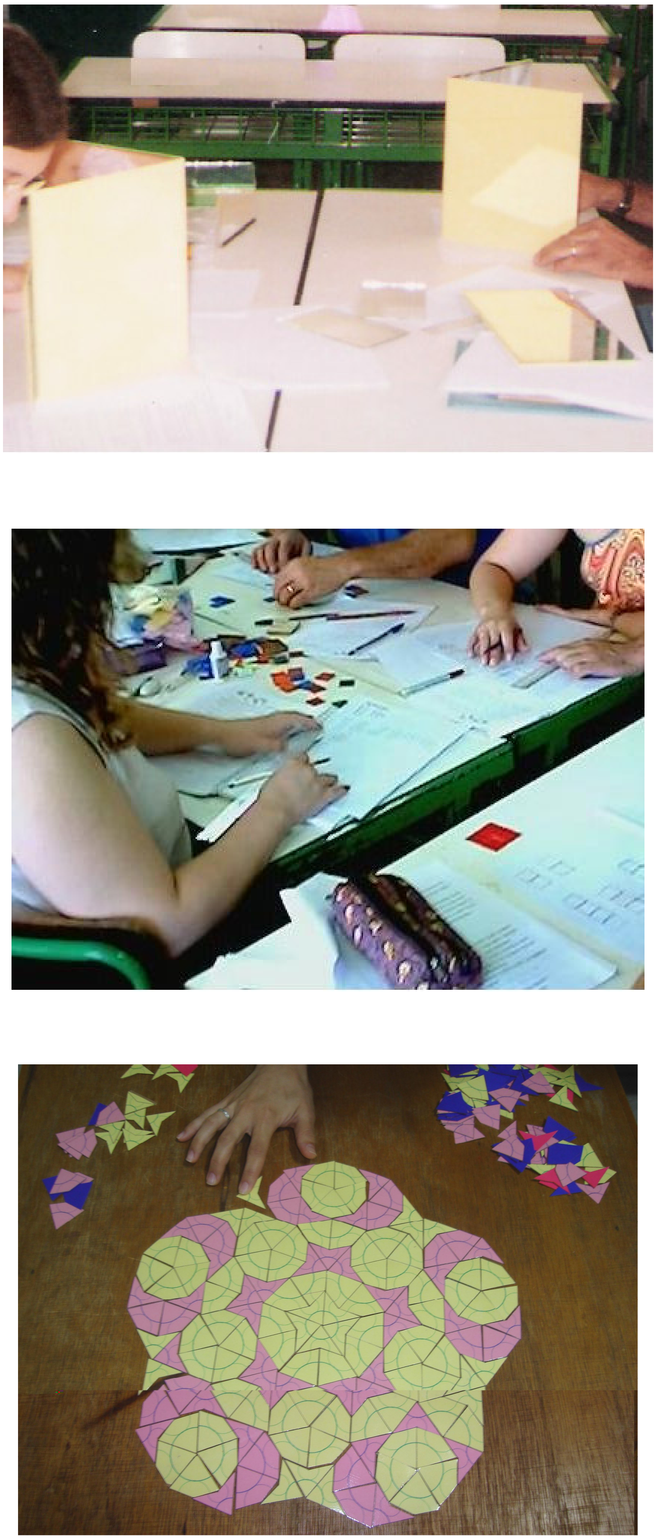


Fig. 61: *professores-alunos desenvolvendo atividades*

CAPÍTULO 4: PRIMEIRO MOVIMENTO EM TORNO DOS DADOS

4.1 Os Dados da Pesquisa

Os dados são as evidências, as pistas que levam o investigador a ter uma visão abrangente do fenômeno que está a compreender. Na pesquisa qualitativa, eles provêem da imersão empática do pesquisador no cenário escolhido como campo de sua pesquisa.

A entrada no campo exige um cuidado especial, visto que a relação de confiança com os sujeitos da pesquisa é que viabiliza o acesso aos dados. Estabelecer uma relação de respeito mútuo possibilita ao pesquisador a compreensão das vivências dos participantes, tornando possível articular os significados revelados nesse contexto.

Para obter os dados pode-se fazer uso de diferentes estratégias, como observação participante, entrevista, filmagem. Segundo Bogdan & Biklen (1994, p.150) o resultado bem sucedido de um estudo qualitativo baseia-se em notas de campo detalhadas e expressivas. Assim, nos registros, as ações, as expressões e os diálogos entre os sujeitos devem ser minuciosamente abrangidos, possibilitando a realização das análises posteriores.

Após o trabalho de campo o investigador deve organizar os dados coletados, de modo a obter um modelo que possa tratar, tendo em vista a compreensão do fenômeno focado. As evidências de seu estudo devem ser retiradas dos diálogos e manifestações presentes nas descrições que elaborou. Por isso, mais que um simples texto, essas descrições devem englobar a amplitude da experiência pesquisada.

Em nosso estudo, a filmadora foi utilizada como recurso para a gravação dos encontros com os professores-alunos. Também fazíamos anotações das interações ocorridas transcrevendo, de modo mais pleno possível, a fala dos sujeitos na íntegra e descrevendo o contexto das situações relatadas, buscando não perder ou distorcer o seu sentido original.

Logo após o término de cada encontro, nos debruçávamos sobre os registros audiovisuais e as anotações e elaborávamos a descrição escrita. Retomávamos esses registros quantas vezes fossem necessárias, a fim de reportar os encontros da forma mais detalhada possível. Considerávamos imprescindível que a transcrição fosse realizada por nós mesmos já que participamos da experiência dos encontros e víamos no processo de transcrição, por si só, uma análise inicial que seria de fundamental importância para as etapas posteriores.

Notamos, na passagem das filmagens para o texto escrito, que poderíamos não revelar toda a riqueza das interações dos encontros se nos limitássemos à simples transcrição das falas dos sujeitos. Por este motivo, procuramos dar perspectiva às transcrições das filmagens, relatando as expressões e gestos dos envolvidos nos diálogos, cuidando para que não incorporássemos idéias estranhas à experiência como vivida. Buscamos detalhar as descrições dos encontros explicitando, inclusive, nossas ações, por considerarmos que elas estavam presentes no desenvolvimento das atividades e nas interações ocorridas.

Após a realização do curso com os professores-alunos, organizamos as descrições com o objetivo de aprofundar nossa compreensão e avançar com nossa interpretação sobre os dados. Em um primeiro momento, efetuamos, nessa perspectiva, a análise *ideográfica*, encaminhando-nos, então, para a *nomotética*. Ou seja, demos, inicialmente, destaque às análises dos individuais, buscando, então, em um ato de teorização, as generalizações possíveis ao apontar as características estruturantes subjacentes àqueles individuais.

4.2 A Análise Ideográfica e as Cenas Significativas

Analisar as descrições atentivamente, sob o foco da interrogação, permite que se iluminem aspectos significativos que possibilitam desvelar o fenômeno sob certas perspectivas. Esses aspectos significativos, "recortados" das descrições, são denominados, na pesquisa fenomenológica, *unidades de significado*. Essas unidades só existem em relação à atitude e disposição do pesquisador, quando ele imerge no mundo das suas descrições.

Na análise ideográfica, o pesquisador busca uma síntese transitória da compreensão do fenômeno, por meio da identificação e interpretação dessas unidades que se apresentaram como significativas diante da questão diretriz de seu estudo.

O pesquisador busca, nas descrições, manifestações revelatórias pertinentes que possam conduzi-lo para a compreensão do fenômeno. Procura colocar-se na perspectiva dos sujeitos de sua pesquisa, mobilizando seu pensar no sentido de esclarecer a descrição, numa postura que intenta possibilidades de compreender.

Em nosso estudo, a experiência vivida nos encontros é o pano de fundo das manifestações dos sujeitos. O sentido e os significados que podemos vislumbrar surgem nas interações ali ocorridas.

Iniciamos a análise realizando diversas leituras das descrições que obtivemos, buscando pelo sentido do todo. A seguir, as leituras foram mais orientadas. Norteados pela questão diretriz de nossa pesquisa, procuramos pelas *unidades de significado*. Repetíamos e interpretávamos nossa pergunta diretriz, por diversas vezes, a fim de clarificar nossas descrições, para que pudéssemos encontrar aspectos ou passagens revelatórios.

Porém, enfrentamos a dúvida sobre o modo pelo qual iríamos tratar os dados, para melhor analisá-los. Considerando a especificidade dos dados coletados, notamos ser inviável buscarmos as unidades significativas nas falas individuais dos sujeitos, pois estas falas estavam inseridas em diálogos que surgiam coletivamente e que adquiriam sentido na complementação com as outras falas. A fragmentação dos diálogos em frases solitárias extinguiria o sentido revelado nas conexões entre as diversas vozes e expressões, pois as manifestações dos sujeitos ocorriam de forma intercalada, repentina e autêntica, formando um núcleo de sentido. Este núcleo perderia suas características essenciais se fosse desmembrado, e não teria mais a significação original. Percebemos que a análise de cada fala, desconectada do diálogo à qual pertencia, extinguiria seu sentido e prejudicaria a compreensão do fenômeno que focávamos.

Diante destas constatações, notamos que seria necessário delimitar estes núcleos de significação em recortes não restritos a trechos de falas individuais, mas que abrangessem o diálogo que nos revelou uma unidade de sentido. Esses recortes serão apresentados na forma de *cenas significativas*.

Detoni & Paulo (2000, p.164) explicam que a *cena* possibilita ao pesquisador

> ver uma *idéia* sendo própria a uma série de manifestações convergentes para ela [...] Além de ver estas manifestações em cada sujeito, há uma atribuição comum de significados que o grupo todo de sujeitos intencionados na experiência deixa ressaltar na iminência do intersubjetivo. Cada sujeito articula compreensões que necessitam ser comunicadas *ao outro*. Há, portanto, sempre a experiência da alteridade, que se expressa numa rede comum de significados constituídos.

A determinação das cenas não visa apresentar um encadeamento linear de movimento dos sujeitos, mas possibilitar a compreensão dos sentidos revelados no *cenário* da pesquisa.

> Cenário é uma maneira de dizer do todo que motiva a atividade. Percebe-se que os sujeitos numa situação em que nunca estão em atitude predicativa falam, ou se expressam, como se movendo num todo. Esse todo é aberto: ao outro, aos pré-conhecimentos do mundo cultural de cada um, a todas as experiências passadas que se retomam, e, qual um fluido em gás, aberto como *abertura*, como propensão, na chegada do outro e suas ofertas de significados autênticos compreendidos como coerentemente possíveis nesse todo. (DETONI & PAULO, 2000, p. 150)

Vislumbramos nas cenas uma forma de organizar e apresentar os dados, de modo a poder revelar o sentido percebido na experiência que vivenciamos. Voltamos nossa atenção para as descrições dos encontros, dirigindo-nos em busca das cenas significativas, interpretando cada uma delas de forma a possibilitar que o leitor se intere da análise por nós efetuada, podendo, por sua vez, interpretar o sentido que ela lhe faz.

4.3 A Organização das Cenas: Identificando os Atores

Apresentar os dados da pesquisa na forma de *cenas significativas* exige um cuidado especial, com a finalidade de situar o leitor diante do movimento ocorrido no *cenário*. Nesse sentido, antes da apresentação das cenas significativas de cada encontro, fazemos uma sucinta descrição do conteúdo abordado.

Cada cena possui um título e um breve comentário sobre como ela se origina. Elas serão apresentadas em tabelas, nas quais a primeira coluna contém a descrição da cena, a segunda contém a explicitação dos termos utilizados nos diálogos – por meio de consulta ao léxico[11] – e a terceira contém as asserções articuladas pela pesquisadora, visando expor nossa compreensão com relação às manifestações dos sujeitos envolvidos. Após cada cena, discorremos sobre ela, explicitando nossa compreensão sobre os significados que ela nos revelou.

Os professores-alunos, como já mencionamos, serão identificados pela letra inicial da disciplina que lecionam (M: Matemática, A: Arte) junto a um número de 1 a 12. Outras abreviações serão utilizadas:

Prof. or.: professor orientador desta pesquisa e responsável pelos encontros;

Pesq.: pesquisadora;

Coletivo: vários professores-alunos;

Coletivo de Mat: professores-alunos de Matemática;

Coletivo de Arte: professoras-alunas de Arte.

Os encontros foram numerados de 1 a 7 e as cenas de 1 a 39. Cada tabela será identificada com os números do encontro e da cena a ela correspondentes.

Como dissemos, nos encontros não tivemos a intenção de controlar o tempo de duração das atividades. Da mesma forma, não nos preocupamos em padronizar a extensão de cada cena. Foi privilegiada a garantia de contemplar as vozes que compõem o diálogo, formando o núcleo de sentido necessário para as análises posteriores.

[11] Consultamos o dicionário da língua portuguesa Houaiss.

4.4 Apresentando as Cenas Significativas

PRIMEIRO ENCONTRO (E1)[12]

Após as apresentações, o professor-orientador esclareceu aos professores-alunos nossas intenções na realização do curso e fez considerações sobre nossas expectativas com relação às interações entre as duas disciplinas.

Foram desenvolvidas atividades sobre conceitos fundamentais em geometria e polígonos e utilizados canudinhos, barbante, tesoura, espelhos articulados e segmentos de cartolina.

Todos os professores-alunos estavam presentes e, feitos os esclarecimentos quanto aos propósitos relacionados à nossa pesquisa de mestrado, pedimos permissão para filmar os próximos encontros, para o que a concordância foi geral.

CENA 1: sobre a geometria e seu ensino

O professor-orientador fala sobre as pavimentações do plano e a geometria. Inicia-se uma discussão que envolve a atenção de todos, a partir da fala de M6 sobre o ensino de geometria.

E1-C1

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M6 afirma: "eu não me sinto preparada pra ensinar geometria"	-Preparada: em condições de atingir certo objetivo	Não se sente em condições de ensinar geometria
Coletivo de Mat: alguns professores-alunos comentam que os livros didáticos apresentam a geometria no final, o que dificulta a efetivação do seu ensino por faltar tempo no fim do ano letivo. Porém, outros colegas contestam essa afirmação dizendo que há livros que apresentam a geometria intercalada com os outros tópicos da matemática. É citado, inclusive, o livro		Alguns professores-alunos afirmam que os livros didáticos apresentam os tópicos de geometria no final, colaborando com o abandono do seu ensino. Porém, outros colegas

[12] Esse encontro não foi filmado. As descrições apresentadas foram extraídas de nossas anotações de campo e, portanto, já são, em parte, asserções articuladas pela pesquisadora.

didático de autoria de Imenes (Luiz Márcio Imenes & Marcelo Lellis; coleção: Matemática)		lembram que há livros em que os conteúdos de geometria são apresentados de forma intercalada com outros conteúdos matemáticos.
Prof. Or.: comenta o abandono do ensino de geometria, a partir dos anos 70, com o advento da Matemática Moderna. **Coletivo**: alguns professores-alunos recordam a disciplina de Desenho Geométrico e comentam sobre sua exclusão do currículo e sobre sua importância, já que a geometria, muitas vezes, não é ensinada nas aulas de matemática.		O fim da disciplina de Desenho Geométrico é apontado como um fator que contribui para o abandono do ensino de geometria
M4: "era dada pelo professor de educação artística. Era melhor" **Coletivo de Mat.**: fazem gestos positivos	-Melhor: superior ao que lhe é comparado; mais satisfatoriamente	Considera que era melhor quando o professor de educação artística lecionava desenho geométrico.

E1-C1: EXPLICITANDO A CENA

Ao expor nossa intenção de apresentar aos professores-alunos um material diversificado daquele tradicionalmente usado no ensino de geometria, é questionada a importância deste conteúdo e a ênfase dada ao tema nos últimos anos, iniciando-se uma discussão sobre a geometria e seu ensino, que chamou a atenção de todos os presentes. A partir daí, os professores-alunos levantam algumas questões relacionadas ensino de geometria como: despreparo para ensiná-la, livros que apresentam os conteúdos geométricos no final e a eliminação da disciplina de Desenho Geométrico do currículo da Educação Básica.

Quanto aos livros didáticos, alguns professores-alunos alertam que eles vêm sofrendo alterações e que há livros que trazem a geometria intercalada a outros conteúdos. Citam, como exemplo, a coleção de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental de autoria de Luiz Márcio Imenes & Marcelo Lellis (1997).

Ao revelar-se despreparada para abordar a geometria em suas aulas, a professora-aluna demonstra ter receio em ensiná-la, talvez por desconhecer metodologias e recursos para ensiná-la, revelando estar atenta à sua prática.

A extinção das aulas de Desenho Geométrico do currículo da Educação Básica é apontada como um fator negativo, pois a existência da disciplina, de certa forma, garantia o ensino de geometria, que, nas aulas de Matemática, muitas vezes, é deixado de lado em detrimento do ensino da aritmética e da álgebra. Alguns professores-alunos de Matemática consideram que o professor de Educação Artística (Arte) é mais preparado para ensinar os conteúdos de desenho geométrico. Parecem avaliar que as habilidades artísticas dos colegas podem auxiliá-los nessa tarefa.

Na cena, não surgem considerações diretas quanto às concepções dos professores-alunos sobre o ensino de geometria, nem quanto à importância que atribuem ao tema. A discussão gira em torno dos fatores que colaboram com a sua exclusão das salas de aula.

CENA 2: geometria e arte - dialogando com A3

A pesquisadora, com o intuito de compreender mais sobre as relações entre a geometria e a Arte, e por já conhecer A3, sentiu-se a vontade para questionar a professora-aluna sobre a importância da geometria nas aulas de Arte.

E1-C2

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Pesq. pergunta para A3: "geometria é importante em arte?" **A3**: "a geometria é importante pra interpretar as obras de arte"	-Interpretar: determinar o significado preciso de; dar certo sentido a; entender, julgar.	Considera a geometria importante na interpretação de obras de arte

E1-C2: EXPLICITANDO A CENA

Por considerarmos a geometria um conteúdo essencialmente matemático, tínhamos receio de abordar um assunto que não tivesse “utilidade” para as professoras de Arte, em sua prática. Essa cena se mostrou significativa para nós, pois revela o modo de conceber a geometria pela professora-aluna de Arte: ao afirmar que o conhecimento geométrico é importante para a interpretação de obras de arte, a geometria parece ter o sentido de uma “ferramenta” que auxilia no acesso às manifestações e representações humanas, ressaltando seu aspecto utilitário para a disciplina que leciona.

SEGUNDO ENCONTRO (E2)

Nesse encontro, foram desenvolvidas atividades sobre simetria e visualização em espelhos articulados. Utilizamos espelho plano, caleidoscópio de dois espelhos, régua, tiras de cartolina. Também discutimos e analisamos, coletivamente, as soluções das atividades do encontro anterior.

O professor-orientador explicou o processo de reflexão de imagens em espelhos articulados. Porém, é importante esclarecer que não se tratava de uma atividade proposta para os professores-alunos, mas consideramos importante discutir este processo junto ao grupo, para que os encontros não se limitassem à apresentação de atividades, sem a compreensão das propriedades geométricas relacionadas ao material utilizado, mesmo que o estudo deste processo não estivesse diretamente relacionado aos conteúdos geométricos tratados nas séries em que lecionavam.

Apenas M9 estava ausente.

CENA 3: compartilhando curiosidades

Alguns professores-alunos apresentam para a pesquisadora curiosidades e problemas, que relacionam ao tema do encontro.

E2-C3

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
A8 escreve o seguinte numa folha: S A T O R A R E P O T E N E T O P E R A R O T A S e pergunta para a pesquisadora: “você conhece essa frase? Pode ser lida em qualquer direção. Tem uma simetria” **Pesq.**: quer saber o que significa. **A8**: não se lembra da tradução da frase [algum tempo depois] **M7** escreve a seqüência:  ...		Escreve uma estrofe que apresenta uma estrutura simétrica

e propõe à pesquisadora: “complete a seqüência... tem simetria” **Pesq.**: “não consigo” **M7** explica que cada elemento da seqüência é um número natural e sua reflexão	-Seqüência: ato ou efeito de dar continuidade ao que foi iniciado; seguimento	Apresenta um desafio para a pesquisadora, relacionando-o à simetria

E2-C3: EXPLICITANDO A CENA

Os professores-alunos associam o tema do encontro com outras situações, compartilhando com a pesquisadora e com os colegas essas curiosidades. Encontram, nas situações que apresentam, um sentido que as revela organizadas segundo uma simetria, mesmo que não se tratando da definição geométrica do termo. Parecem imaginar, nas situações apresentadas, “eixos de simetria” que as estruturam.

CENA 4: discutindo os enunciados

Após a resolução de algumas atividades, iniciamos a discussão sobre as soluções encontradas pelos grupos nas atividades do encontro passado. A primeira questão era a seguinte: “Que conceitos geométricos sugerem cada situação: a cabeça de um parafuso e o encontro de duas paredes?”.

E2-C4

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
[a cabeça de um parafuso] **M7**: “tem parafuso que é sextavado que lembra um polígono, outros lembram ponto”	-Sextavado: que tem seis lados, hexagonal -Lembrar: sugerir	Considera que há mais de um tipo de parafuso e nem todos sugerem o mesmo conceito geométrico
A3: “acho que ficaria melhor cabeça de um prego”	-Melhor: superior ao que lhe é comparado;	Indica uma mudança no enunciado da

Coletivo: concorda **[o encontro de duas paredes]** **Pesq.**: espera que respondam ‘uma reta’ **M6** apontando para as paredes da sala: “pode ser ângulo também, se pensar nos lados” **Coletivo**: concorda com M6 **Pesq.**: “acho que a situação deveria ser: a intersecção de duas paredes, né?” **Coletivo**: concorda	mais satisfatoriamente	atividade Afirma que o encontro de duas paredes, também, pode ser associado ao conceito de ângulo

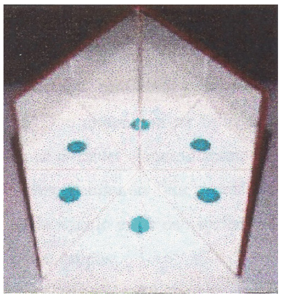
E2-C4: EXPLICITANDO A CENA

Esta atividade consistia em relacionar conceitos intuitivos de geometria com situações ou objetos cotidianos, já que alguns conceitos geométricos podem ser melhor compreendidos através da observação das coisas do mundo físico. O momento de discussão das soluções encontradas para as atividades remete os professores-alunos às possibilidades de seus alunos. Eles se manifestam, dando opiniões relativas aos problemas de interpretação que os enunciados podem gerar. Mesmo sabendo quais conceitos deveriam ser considerados nessa atividade (reta, ponto, plano e ângulo), lembram que, muitas vezes, os alunos fazem associações que não podem ser consideradas incorretas pelo professor.

Fizemos algumas alterações no enunciado, a partir da opinião e consenso dos presentes, sendo que, na última situação, a pesquisadora acabou induzindo o movimento da compreensão.

CENA 5: compartilhando as soluções

Outra atividade, cuja solução é discutida pelo grupo, consiste na análise das reflexões de um ponto-objeto colocado entre dois espelhos articulados em 60º. Ela questiona: quantas imagens são geradas? O que ocorre se um pequeno ponto-objeto está encostado em um dos espelhos? O que se obtém se um ponto-objeto está encostado no vértice do ângulo formado pelos espelhos?



E2-C5

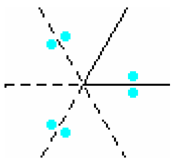
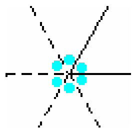
Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
[quantas imagens são geradas?] **Pesq.**: observa que alguns professores-alunos contam o objeto real como se fosse mais uma imagem, concluindo que são formadas seis imagens		
A8: "mas um é o real"	-Real: relativo ao que é concreto; o que é material, que existe de fato	Explica que o objeto real não dever ser contado, pois não é imagem
Pesq.: concorda com A8 **Coletivo**: faz alterações na solução, quando necessário		
[O que ocorre se um <u>pequeno</u> ponto-objeto está encostado em um dos espelhos?] 		
A8: "Nós continuamos vendo cinco imagens em três pontos simétricos, porque ficou dois juntinho aqui, dois juntinho ali... formando um triângulo. Como o feijão era grande, ficou duas imagens, se fosse menor seria três pontos"	-Simétricos: aquilo que está disposto em simetria com outra coisa	Apresenta e explica para o grupo suas conclusões
M6 (apontando para duas imagens que estavam próximas): "já passei a visualizar estes dois como uma imagem"	-Visualizar: tornar visual, convertendo (algo abstrato) em	Explica como interpretou a reflexão das imagens

	imagem mental ou real	
Coletivo: concorda que a descrição apresentada por A8 é a mais apropriada		
[o que se obtém se um ponto-objeto está encostado no vértice do ângulo formado pelos espelhos?] 		
Pesq.: observa que alguns professores-alunos concluem que é um hexágono e outros que é um círculo.		
A8: “eles ficavam com seis pontas. Como o caroço [de feijão] era grande ele ficava pontudinho... Parecia um hexágono”	- Pontudo: que possui ponta; agudo, aguçado	Explica porque concluiu que visualizou um hexágono
M6: “acho que podemos ficar no círculo mesmo”		Considera que o círculo é a resposta mais apropriada
M7: “quando tende a zero...”	-Tender: dirigir-se, encaminhar-se; aproximar-se de	Considera que quando o ponto-objeto é muito pequeno a reflexão aproxima-se de um círculo

E2-C5: EXPLICITANDO A CENA

Novamente a atividade busca analisar algumas situações relacionadas à reflexão de um ponto-objeto. Ela gera muita discussão, havendo conclusões divergentes entre os participantes. Os professores-alunos manipulam os espelhos para encontrar uma “boa solução”, buscando descrever a situação gerada e comprovar observações e respostas, pois não há uma solução objetiva. Durante a análise, eles explicam suas conclusões aos colegas, utilizando os espelhos para confirmarem suas observações. Após a discussão, prevalecem as soluções consideradas apropriadas pelo coletivo.

CENA 6: compartilhando a solução

Uma atividade se refere à relação existente entre o ângulo de abertura de dois espelhos articulados e o número de imagens obtidas.

E2-C6

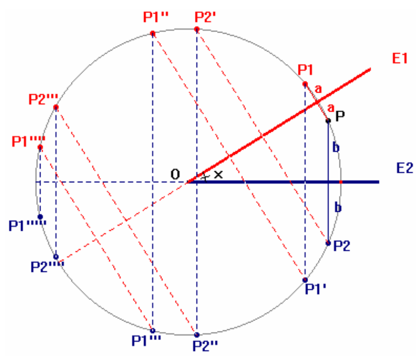
Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M7 apresenta a seguinte fórmula como solução: 360/*a* -1, explicando que *a* é a medida do ângulo de abertura		Apresenta uma fórmula como solução para a atividade
Pesq.: verifica a solução de M7		
M7: explica para os colegas do seu grupo a determinação da fórmula, usando os espelhos para confirmar sua validade		Explica a fórmula para os colegas utilizando os espelhos

E2-C6: EXPLICITANDO A CENA

Nessa atividade, considerando-se estar ela voltada para o Ensino Fundamental, esperávamos apenas que os professores-alunos verificassem que quanto menor o ângulo de abertura dos espelhos maior seria o número de imagens geradas. Porém, é apresentada uma solução mais formal que a esperada, explicitando-se a busca do professor-aluno de Matemática por regras ou leis. A solução é compartilhada com os colegas e os espelhos são utilizados para "demonstrar" a sua validade.

CENA 7: sobre o material manipulativo

No início do encontro, o professor-orientador desenha na lousa a representação da reflexão de um ponto entre dois espelhos articulados (fig.), para, após algumas atividades, explicar ao grupo a geração das imagens.



E2-C7		
Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Pesq.: nota que alguns professores "estranharam" o desenho representado.		
A8 olha para a lousa e exclama: "que que é isso?"		Impressiona-se com a representação
[após algumas atividades]		
Prof. Or.: inicia a explicação do processo de reflexão de imagens, utilizando a representação feita na lousa		
Pesq.: interpreta a reação dos professores como explicitando a falta de entendimento.		
M7: "dá pra fazer mais devagar? [risos]"	-Devagar: vagarosamente, sem pressa; de forma progressiva	Demonstra falta de compreensão e pede ao professor-orientador que explique mais lentamente
Prof. Or.: fala sobre o campo visual de um espelho plano, e explica novamente o esquema da lousa.		
Pesq.: considera que a atitude do professor-orientador auxilia os professores-alunos na compreensão da representação.		
A8 (olhando para o seu espelho articulado): "agora que eu tô de frente, eu tô vendo"		Utiliza os espelhos articulados para verificar a explicação do professor-orientador

M6 questiona: "porque é importante a gente saber disso aí?" (aponta para o desenho na lousa) **Prof. Or**: fala da possibilidade de se ensinar outros conteúdos de geometria. **Pesq.**: argumenta que é pra entender como ocorre a reflexão de imagens, caso haja questionamento dos alunos: "é importante o professor entender como funciona"	-Importante: necessário, fundamental -Saber: ter conhecimento; compreender	Questiona a importância da explicação proferida pelo professor-orientador.
A3: "eu achei importante, como professora de arte, porque eu tirei do bidimensional, que é muito difícil do aluno visualizar, e trouxe pro tridimensional, usando objetos. E ficou muito mais fácil de explicar. Na manipulação de objeto ele vai entender melhor o conceito. Fica muito mais fácil, ele vai entender muito melhor o conceito"	-Bidimensional: que possui duas dimensões -Difícil: complicado; que demanda esforço intelectual para ser compreendido -Tridimensional que possui três dimensões -Objeto: coisa material que pode ser percebida pelos sentidos -Fácil: claro, compreensível; espontâneo -Explicar: expor, explanar	Considera importante a explicação e a utilização dos espelhos para o entendimento da reflexão. Dá destaque para a tridimensionalidade da visualização obtida nos espelhos em relação à representação do processo de geração de imagens (bidimensional). Considera que a manipulação dos espelhos facilita a

	- Manipulação: ato de tocar, transportar com as mãos; manejo, utilização -Entender: compreender, captar -Melhor: superior ao que lhe é comparado; mais satisfatoriamente -Conceito: produto da faculdade de conceber; compreensão que se tem de uma palavra; noção; concepção	explicação dos conceitos e auxilia na compreensão dos mesmos
M6 (como que respondendo a questão que lançou anteriormente): "dá pra trabalhar na sétima série retas paralelas e transversais"		Associa outros conteúdos matemáticos ao tema discutido
A3: "manipulação de objeto fixa mais, é mais fácil de entender. Manipulando e vendo lá na lousa, lá você não entende nada, dá pra passar o conceito mais fácil"	-Manipulação: ato de tocar, transportar com as mãos; manejo, utilização -Fixar: guardar em memória, memorizar, conservar -Passar: transmitir, comunicar	Considera que a manipulação facilita o entendimento dos conceitos envolvidos e auxilia no ensino dos mesmos

A8: "Quando ele [o professor-orientador] colocou aquele círculo na lousa eu falei: 'gente! que que é isso?' Nada! Provando com a prática com o espelho, a gente consegue entender a simplicidade daquilo"	-Prática: ato ou efeito de fazer (algo); ação, execução, realização, exercício -Simplicidade: ausência de complicação	Considera que a manipulação dos espelhos auxiliou no entendimento da representação e revelou a sua simplicidade.

E2-C7: EXPLICITANDO A CENA

Na discussão da atividade com espelhos articulados foi necessário que o professor-orientador fizesse uma intervenção para explicar o processo de reflexão de imagens em espelhos planos. Todos os professores-alunos ficam atentos. Eles manipulam os espelhos articulados a fim de constatar as afirmações do professor-orientador por meio da visualização da reflexão de um ponto objeto. Fazem gestos positivos que evidenciam a compreensão do processo.

É questionada a importância da explicação do professor-orientador, mas o tom da pergunta é de desafio. Ao mesmo tempo em que espera uma resposta para sua questão, a professora-aluna parece estar refletindo sobre ela, buscando uma relação com sua prática em sala de aula. Após algumas falas, ela associa a explicação com outros conteúdos matemáticos, que fazem parte do currículo das séries em que leciona.

A discussão leva as professoras-alunas de Arte a manifestarem sua opinião, enfatizando que a manipulação dos espelhos facilita a explicação – do professor – e a compreensão – do aluno – de conceitos geométricos associados ao processo de reflexão de imagens. É perceptível a surpresa dos professores-alunos ao constatarem, por meio da manipulação dos espelhos, a simplicidade da representação que, inicialmente, consideram complicada. Demonstram curiosidade em conferir, visualizando nos espelhos, as explicações do professor-orientador.

CENA 8: sobre a informática - dialogando com M7

M7 chama a pesquisadora e faz considerações sobre o uso do computador.

E2-C8		
Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M7: “não é da minha geração... Já participei dos cursos sobre o cabri, do estado, mas nem considero”	-Geração: conjunto de pessoas que tem a mesma idade (aprox)	Expressa sua aversão pelo computador

E2-C8: EXPLICITANDO A CENA

Por mais de uma vez, o professor-aluno manifestou, para a pesquisadora, sua aversão ao computador. Parecia sentir-se “ameaçado” pela máquina. Talvez não fosse o único, mas o incomodava o fato de não “dominar” a informática, justificando esta defasagem por pertencer a uma geração mais antiga, que não cresceu envolvida com a utilização do computador, como a geração de seus filhos, por exemplo. No diálogo, o professor-aluno se sente confortável para nos chamar e manifestar seu desapontamento.

TERCEIRO ENCONTRO (E3)

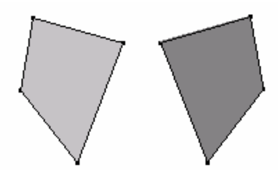
As atividades desenvolvidas abordavam as pavimentações uniformes do plano. Utilizando o kit-polígonos deveriam ser encontrados alguns arranjos, a fim de identificar aqueles que pavimentam o plano uniformemente. Também, foram realizadas algumas construções com o software *Cabri-Géomètre II*.

Todos os professores estavam presentes.

CENA 9: sobre a composição de uma pavimentação

Ao montar uma pavimentação, M7 questiona sua composição.

E3-C9

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M7 pergunta para a pesquisadora: "posso dizer que forma uma pavimentação se usar as peças dos dois lados?" [usar peças enantiomorfas, como na figura abaixo]  **Pesq.**: explica que ele terá uma pavimentação formada por polígonos enantiomorfos (ver página 46).		Questiona a formação de uma pavimentação

E3-C9: EXPLICITANDO A CENA

O tema deste encontro desperta dúvidas que poderiam ter sido amenizadas se tivéssemos lido e analisado, conjuntamente, o texto sobre as pavimentações, antes do início das atividades. A atividade pede que pavimentem uma região utilizando um só tipo de quadrilátero, e faz com que o professor-aluno questione o conceito de pavimentação, pois o mesmo quadrilátero, feito em cartolina, poderia preencher uma superfície com ambas as faces voltadas para cima. Evidenciou-se um tipo de divergência ocasionado pela forma isolada com que são tratadas a geometria espacial e a plana, de modo que, por vezes, uma invalida a outra. Foi importante discutir as possibilidades de criação de pavimentações e de se investigar cada caso – usando uma ou as duas faces –, pois possibilitou a análise de cada situação.

O tema pavimentações é pouco abordado pelos livros didáticos e raramente trabalhado nas aulas de Matemática, havendo, assim, um conhecimento escasso sobre ele. Porém, à medida que julgavam necessário, os professores-alunos solicitam nossa ajuda para discutirmos os enunciados e os conceitos envolvidos e para esclarecer suas dúvidas quanto ao tema.

CENA 10: manifesto das professoras-alunas de Arte

A pesquisadora percebe que as três professoras de Arte do grupo maior estão "entediadas" com as atividades.

E3-C10

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
A3: "esse negócio de número é pra professor de matemática"	-Negócio: assunto de interesse	Considera que números e contas são próprios para os professores de Matemática
A8 (dirigindo-se para professores de matemática do seu grupo): "façam as contas que a gente monta"		Sugere aos professores-alunos de Matemática que façam as contas exigidas na atividade enquanto as de Arte montam as pavimentações
A3 fala para **A8** e **A10**: "Achei a atividade do caleidoscópio legal. Tudo no visual vai dar pra gente usar. Mas quando chegou esse negócio de contas... Pavimentação do plano é parte matemática"	-Legal: palavra que qualifica pessoas ou coisas com atributos positivos -Visual: obtido ou mantido através da visão -Usar: servir-se, utilizar	Analisa positivamente a possibilidade de usar os caleidoscópios nas aulas de Arte, mas não os cálculos envolvidos

A8 (apontando para o texto): “fala aqui: são mosaicos. E no mosaico pode ter espaço”	-Mosaico: padrão visual criado pela incrustação de pequenas peças coloridas, sobre uma superfície; pavimento composto de ladrilhos -Espaço: extensão limitada	Afirma que no mosaico pode haver espaço entre as peças que o compõem
A3 concorda: “falou tudo”		Concorda
A8 chama a pesquisadora e explica: “A dificuldade de Arte no assunto é o seguinte: por exemplo, na pavimentação os ângulos têm que se encaixar certinho, matematicamente, e a gente fica fazendo essas contas. Em arte, a gente em arte trabalha o que? Mosaico. E com o mosaico não precisa encostar. Não precisa contar o ângulo. A gente poderia colocar essa figura assim [aponta para um arranjo do texto e gesticula como se puxasse um polígono para deixar um espaço entre eles] e depois preencher de massa. Aí não precisa ter o mesmo ângulo.”	-Dificuldade: estorvo, obstáculo; que age contra, oposição -Trabalha: desenvolver uma atividade como -Preencher: encher, completar, ocupar	Compara os mosaicos trabalhados na disciplina de Arte, no qual é desnecessário calcular os ângulos das figuras, às pavimentações abordadas no encontro, e explica o sua compreensão sobre o tema
Pesq.: Fica surpresa e considera muito interessante a colocação de A8. Fala que as atividades abordam os mosaicos geométricos e que mesmo no mosaico artístico a idéia é preencher tudo, já que		

nesse caso o vazio seria preenchido com a massinha. Explica que na construção dos mosaicos utilizando, o software *Cabri-Géomètre II*, deve haver exatidão na soma dos ângulos para que as peças se encaixem		
A8: "tem a ver com as construções. Antigamente não tinha argamassa, eles colocavam a pedra e encaixavam"	-Encaixar: ajustar, entrar no encaixe	Compara as pavimentações às construções antigas.
Coletivo de Arte: faz gestos positivos.		
A8: "eles [aponta para os professores de Matemática] raciocinam muito rápido e a gente não consegue acompanhar"	-Raciocinar: fazer uso da razão para entender, calcular, deduzir, julgar -Rápido: cujo tempo de execução é breve -Conseguir: alcançar, atingir -Acompanhar: realizar a mesma ação ou agir da mesma maneira	Considera difícil acompanhar os professores-alunos de Matemática nos cálculos exigidos nas atividades
Pesq: o problema são os cálculos?		
A3: "Não é que é o problema. Não é interessante. Nós não vamos usar, não é interessante pra gente"	-Interessante: que motiva; que se revela útil; que traz vantagem	Justifica que as contas não terão utilidade na aula de Arte.
A8: "quando a gente viu estes desenhos [aponta os mosaicos do texto]: 'aí que lindo'. Não imaginava que... [risos]"		Revela-se decepcionada por não encontrar o que

		esperava nas atividades
A3: "É que na hora dos cálculos não é interessante"		Considera que os cálculos exigidos na atividade não são interessantes
A8: "Não que não seja interessante, eu nunca pensei que pudesse encaixar, 360º ..."	-Nunca: jamais -Pensar: refletir sobre; imaginar	Revela-se surpresa por descobrir que os ângulos deveriam se encaixar com precisão de 360º
Pesq.: "o olhar matemático e o olhar artístico, quem vai explorar isso? A gente tem que trocar, né?" **Coletivo de Arte**: comenta que as atividades anteriores eram mais interessantes que as atuais **Pesq.**: sugere para as professoras-alunas de Arte que passem para as próximas atividades, que envolviam 3 espelhos articulados. Afasta-se do grupo e explica para os demais que podem passar para as próximas atividades, pois os arranjos seriam retomados no próximo encontro numa explicação do professor-orientador.		
A3: "aquela explicação me deu um insight" (referindo-se à explicação do encontro anterior sobre a reflexão de imagens em dois espelhos articulados).	-Insight: clareza; iluminação, estalo, luz	Comenta que a explicação proferida pelo professor-orientador auxiliou o seu entendimento

Coletivo de Arte: manuseando o texto, encontra as fórmulas que explicam a reflexão de imagens em três espelhos articulados. As professoras-alunas se olham e riem.		
A3 (dirigindo-se para os professores-alunos de Matemática do seu grupo, que estavam encontrando os arranjos da atividade): "já fez tudo? deixa eu copiar"	-Copiar: imitar, reproduzir	Solicita que os colegas de Matemática forneçam a solução encontrada

E3-C10: EXPLICITANDO A CENA

A determinação dos arranjos exige que se verifique se a soma dos ângulos dos polígonos que o formam é, exatamente, 360º. O excesso de cálculos fez com que as professoras-alunas de Arte se desinteressarem pelo desenvolvimento das atividades. Por outro lado, elas apresentam considerações importantes com relação aos mosaicos trabalhados na disciplina de Arte, surpreendendo a pesquisadora, apresentando uma abordagem artística que não foi tratada em nosso estudo. Além disso, as professores-alunas de Arte não se intimidam em revelar seu descontentamento com o excesso de cálculos e em fazer considerações com relação às atividades do encontro anterior, que julgam serem mais interessantes para as aulas de Arte.

O diálogo entre a pesquisadora e as professoras-alunas possibilita a interação entre as diferentes maneiras de abordar o tema. Elas expressam seu desapontamento entre o esperado e o encontrado nas atividades. Porém, prevalece na discussão o interesse, de ambas as partes, de buscar compreender a perspectiva do outro.

A prática das professoras-alunas de Arte se mostra presente em suas reflexões sobre a importância que determinada atividade pode ter para a disciplina que lecionam.

Quanto aos cálculos exigidos nas atividades, as professoras-alunas de Arte manifestam que eles não são interessantes em suas aulas. É importante ressaltar que elas não apresentaram dificuldades na compreensão dos enunciados e na realização dos cálculos. Tanto a pesquisadora quanto o professor-orientador, constataram, nos vários diálogos com as professoras-alunas de Arte, que elas possuem uma ampla compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos nas atividades. O receio inicial da pesquisadora com relação às dificuldades que elas poderiam apresentar foi superado ao constatar a agilidade com que as professoras-alunas compreendiam os enunciados e buscavam as soluções. A ênfase nos cálculos, ou seja, a dominância do conhecimento matemático, pode ter impossibilitado o avanço das interações entre os professores-alunos, em direção às discussões sobre outros aspectos envolvidos no estudo, como, por exemplo, a combinação de cores na formação dos arranjos, outras possibilidades para a obtenção de padrões, etc.

CENA 11: sobre a confecção das peças

Antes de nos dirigirmos para a sala de informática, A8 questiona a confecção do kit-polígonos.

E3-C11

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
A8, segurando uma peça em forma de hexágono: "como você fez essas peças?"		Quer saber como as peças foram confeccionadas
Pesq.: explica que foram feitos com o software *Cabri II*, por meio da ferramenta polígono regular, imprimidos em papel cartão e recortados		
A8: "eu faço com régua e compasso com eles [alunos de A8]. [aponta para a peça] Assim é mais fácil"	-Fácil: que se executa ou se obtém sem dificuldade	Considera mais fácil confeccionar as peças utilizando o software do que régua e compasso

E3-C11: EXPLICITANDO A CENA

Essa cena se mostrou significativa, pois revela o interesse da professora-aluna em saber mais sobre a confecção do material manipulativo utilizado na atividade (o kit-polígonos), revelando o desejo de conhecer e, talvez, utilizar o material em suas aulas. Compara suas ações com a que apresentamos: considera mais fácil utilizar o software *Cabri-Géomètre II*, como foi feito por nós, do que construir as peças com régua e compasso. Parece-nos que a precisão e a rapidez das construções realizadas com o software levam a professora-aluna a fazer tais considerações.

CENA 12: sobre o ensino de geometria – dialogando com M6

Na sala de informática, M6 chama a pesquisadora para falar sobre a geometria.

E3-C12

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M6 afirma: “acho que a geometria abre a cabeça, mas não consigo achar a sua importância para o dia-a-dia, para a vida, uma aplicação prática pro aluno”	-Abre: dar a conhecer, desvendar -Achar: descobrir, identificar -Aplicação: utilização prática de; emprego -Prática: ato ou efeito de fazer (algo); ação, execução, realização, exercício	Considera a importância da geometria, mas não verifica sua aplicação no cotidiano do aluno
Pesq.: comenta que a geometria desenvolve a observação e pergunta se ela achava que compreender a reflexão de imagens tinha relação com o cotidiano.		
M6 não responde diretamente, exemplifica: “é diferente da importância de saber uma conta para fazer uma compra”.	-Diferente: que se distingue -Importância: valor, mérito, interesse	Considera que a importância da geometria é distinta da importância dos cálculos no dia-a-dia
Pesq.: se retira, pois o outro grupo estava solicitando sua ajuda.		

E3-C12: EXPLICITANDO A CENA

A busca por aplicações práticas da Matemática no cotidiano do aluno preocupa a professora-aluna, de forma que em muitos momentos do curso ela demonstra a sua inquietação. Em ocasiões anteriores, ela já havia manifestado sua opinião sobre a geometria e as dificuldades encontradas para ensiná-la. É nítida sua preocupação em estar apresentando para seus alunos conteúdos que tenham uma utilidade prática e que apresentem, assim, ligações com o cotidiano deles. Constantemente, ela buscava algum tipo de aplicabilidade das atividades no cotidiano profissional dos alunos. O fato de não encontrar uma "aplicação prática" da geometria no dia-a-dia faz com que ela questione a relevância dos conceitos geométricos, apesar de considerá-los importantes para o desenvolvimento cognitivo do aprendiz. Evidencia-se que o caráter prático/utilitário da geometria não é tão evidente, principalmente quando se busca aplicações ligadas diretamente às necessidades cotidianas de seu aluno.

QUARTO ENCONTRO (E4)

Nesse encontro confeccionamos os caleidoscópios modificados[13] juntamente com professores-alunos. O material necessário, levado por nós, foi: espelhos, cola de sapateiro, emborrachado (e.v.a) para recobrir a parte de trás dos espelhos e estiletes. Cada participante recebeu um caleidoscópio-modificado.

O professor-orientador falou sobre as possibilidades educacionais do caleidoscópio modificado e explicou a geração de imagens múltiplas no caleidoscópio de três espelhos.

Após sua fala, foram desenvolvidas algumas atividades.

Estavam presentes A3, A10, M2, M4, M6, M7, M9 e M12.

CENA 13: confeccionando os caleidoscópios

Alguns professores-alunos, por sofrerem algum tipo de alergia à cola de sapateiro, não participam da confecção dos caleidoscópios.

E4-C13

Descrição da Cena	Explicitação da linguagem do sujeito	Asserções articuladas pela pesquisadora
M2, M7, M6, M4, M12, M9 e o noivo de A3 se propõem a fazer o caleidoscópio para os colegas, inclusive para os que faltaram.		Os professores-alunos colocam-se à disposição para fazer os caleidoscópios para os colegas que não puderam
[terminada a confecção]		
Coletivo de Arte: começa a "personalizar" seus caleidoscópios utilizando os restos de borracha e cola branca, colocando o nome, fazendo flores ou formas geométricas.		Começam a enfeitar seus caleidoscópios
Pesq.: observa que outros professores também enfeitam seus caleidoscópios		Outros professores aderem à prática de enfeitar os caleidoscópios

[13] Ver página 40

E4-C13: INTERPRETANDO A CENA

A confecção dos caleidoscópios revelou a disposição e o interesse dos professores-alunos em colaborar com os colegas. Alguns professores-alunos começam a enfeitar seus caleidoscópios e acabam estimulando os colegas a fazerem o mesmo. A troca e o auxílio revelam a abertura dos professores-alunos para o outro, possibilitando momentos de apreciação mútua de realizações e de atos criadores.

CENA 14: ver e visualizar

O professor-orientador explica a geração de imagens no caleidoscópio eqüilátero.

E4-C14

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Prof. Or. manipula os caleidoscópios e pergunta para os presentes: "o que eu coloco pra visualizar hexágonos? Você consegue fazer a base? Depois vamos colorir. Aí é desenho artístico"		
M7 pergunta para o professor-orientador: "ver e visualizar são diferentes? Ver é o real, né. Então você visualiza nos espelhos?"	-Ver: perceber pela visão, enxergar; distinguir ou alcançar com a vista, avistar -Real: relativo ao que é concreto; que existe realmente, verdadeiro -Visualizar: tornar visual, convertendo em imagem mental ou real; tornar algo visível mediante determinado recurso	Questiona a diferença entre ver e visualizar, explicando a sua compreensão
Prof. Or.: "no kit você vê, no		

caleidoscópio visualiza, manipula, faz coloração. Ensina geometria. Ele [o aluno] tem que imaginar para visualizar" **M7**: "e a gente vai aprender a fazer as bases?" **Prof. Or**.: confirma **Coletivo**: permanece atento à discussão		 Quer saber se aprenderá a fazer as bases para visualização em caleidoscópios

E4-C14: EXPLICITANDO A CENA

Surge um questionamento sobre a diferença entre dois termos usados com freqüência nos encontros: ver e visualizar. Muitas vezes eles são considerados sinônimos, porém o professor-aluno verificou ser importante explicitá-los diante do caráter das atividades desenvolvidas e do material utilizado. Os professores-alunos ficam atentos à discussão e há demonstração de interesse em aprender a fazer as bases caleidoscópicas, para visualizar nos caleidoscópios.

CENA 15: associando a simetria a outros conteúdos

O professor-orientador ressalta a importância de se trabalhar o conceito de simetria, por meio das atividades com espelhos planos. M6, atenta à sua fala, faz considerações:

E4-C15

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M6: "a reta numérica quando vai trabalhar número inteiro"		Refere-se à reta numérica para trabalhar o conceito de simetria

E4-C15: EXPLICITANDO A CENA

Associa um assunto muito trabalhado em Matemática nas séries do Ensino Fundamental, a reta numérica, ao conceito trabalhado nas atividades, a simetria. Demonstra preocupação em relacionar os conteúdos desenvolvidos nos encontros a outros conteúdos ou assuntos.

CENA 16: sobre o processo de pavimentação

O professor orientador explica as fórmulas para a determinação dos arranjos (a mesma que "impressionou" as professoras de arte no encontro passado). Ele inicia sua fala explicando a determinação das fórmulas.

E4-C16

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Prof. Or. dá alguns exemplos de soluções para as equações e explica que nem todos os arranjos que satisfazem as equações formam pavimentações uniformes		
M6: "pra cada número de polígonos é uma [equação]?"		Questiona a determinação das equações
Prof. Or. confirma		
M9: "Foi o que a gente fez aquele dia, né, com o kit"		Relaciona as equações às atividades com o kit de polígonos
M7: "Apesar de satisfazer a condição..."	-Satisfazer: atender; bastar; convir; corresponder	Avalia que nem todas as soluções que satisfazem uma equação formam pavimentações
M6: "Vamos supor que eu fosse pavimentar essa sala..."	- supor: conjeturar, julgar	Quer saber quais os procedimentos necessários para verificar se uma

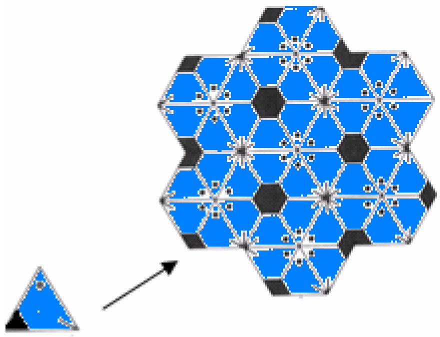
		solução forma uma pavimentação
Prof. Or.: "tem que testar. Nas primeiras colocadas já dá vazio ou sobreposição"		
M6: "minha dúvida era chegar à conclusão errônea"	-Errônea: errada, enganosa	Explica que a sua dúvida era concluir, erroneamente, que toda solução pavimenta o plano
M7: "há uma regra pra descobrir quando um arranjo pavimenta ou não o plano?"	- Regra: código, lei, norma -Descobrir: achar, encontrar, revelar	Questiona a existência de uma regra para encontrar os arranjos que pavimentam o plano
Prof. Or.: explica que para verificar se um arranjo pavimenta uniformemente o plano é possível testá-lo, pois, logo no início do teste, é possível verificar se determinado arranjo não pavimenta, já que, nesse caso, haverá vazios ou sobreposição de polígonos		
M6: "pra saber se forma, só vendo? Tem que tentar?"	-Tentar: arriscar, buscar, empreender	Questiona o professor-orientador, para verifica se suas conclusões estão corretas
Prof. Or.: concorda e dá alguns exemplos		

E4-C16: EXPLICITANDO A CENA

As fórmulas que determinam as configurações de arranjos que podem pavimentar o plano são extensas e parecem ter "assustado" os professores-alunos. Não tínhamos a intenção de enfatizá-las, porém considerávamos que seria importante mostrar que é possível deduzi-las e que a determinação dos arranjos não se limitava à manipulação das peças do kit-polígonos. Durante a explicação do professor-orientador, os professores-alunos fazem questionamentos que parecem auxiliar no entendimento do processo de determinação dos arranjos. Querem conhecer os procedimentos necessários para verificar quais soluções geram pavimentações uniformes. Questionam a existência de uma "regra matemática" que solucione o problema de verificar quais arranjos obtidos pelas fórmulas pavimentam o plano. O professor explica que é possível realizar tal investigação iniciando a pavimentação e estudando a soma dos ângulos, para que não ocorra sobreposição ou espaços entre os polígonos.

CENA 17: fazendo associações

O professor-orientador fala sobre a construção de bases para a visualização de *designs* alternativos (fig.). Durante a explicação, passamos algumas bases prontas para que os professores-alunos visualizassem nos caleidoscópios.



E4-C17

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M6 pergunta para o professor-orientador: "Você não me bate? Então vou perguntar: o profissional que usa isso, por exemplo, que pode usar isso no seu trabalho. O profissional mesmo, não o professor"	-Profissional: aquele que exerce determinada atividade, por profissão	Questiona o uso dos caleidoscópios por profissionais, que não os da educação
Prof. Or.: "Tem loja, pessoal de piso e cerâmica, que copiou da gente"		
M6 faz um gesto positivo para A10 (que estava sentada ao seu lado)		
M6: "porque eu imaginava trabalhar com isso pra mostrar pro cliente, fala 'ó', mostra	-Imaginar: idear; identificar; fazer	A resposta do professor-orientador

pro cliente, 'vai ficar isso, ó'. Ou mesmo pra quem tá projetando o piso"	idéia de; supor; considerar -Projetar: planejar	confirma as intuições da professora-aluna com relação à questão que lançou
Prof. Or.: "você pode colocar lá [entre os espelhos] pra ver como fica o padrão. Também tem como pintura, como terapia. Os arquitetos usam..."		
M6: "É. O primeiro que eu pensei foi o arquiteto. Porque mesmo pintura na parede, por exemplo, que é um trabalho diferente na realidade não passa a ser um mosaico? Eu acho que eu vou vender pra loja, [risos]"	-Diferente: que se distingue	Compara os mosaicos com algumas pinturas de parede

E4-C17: EXPLICITANDO A CENA

Ao visualizar alguns padrões no caleidoscópio, a professora-aluna associa o uso dos espelhos a outras atividades profissionais, buscando uma aplicação prática para o conteúdo estudado.

Há preocupação em utilizar os caleidoscópios em atividades diversas das realizadas em sala de aula, como, por exemplo, em atividades comerciais, a fim de justificar a importância "utilitária" das atividades apresentadas para o cotidiano de seus alunos.

CENA 18: discutindo possibilidades de ação em sala de aula

O professor-orientador explica que, com exceção de uma, as pavimentações uniformes podem ser visualizadas no caleidoscópio, através das bases que poderiam ser feitas com régua e compasso ou com o software *Cabri-Géomètre II*. Fala, também, dos 21 tipos de vértices, lembrando que apenas 11 geram pavimentações uniformes. Ele ressalta a importância de trabalhar com o kit-polígonos para encontrar os arranjos, considerando-se que o cálculo para descobrir os 21 tipos de vértices é complexo para ser apresentado aos alunos das séries do Ensino Fundamental. Em seguida, apresenta as fórmulas para determinação dos arranjos que geram as pavimentações uniformes.

E4-C18		
Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Prof. Or.: "você não vai fazer [o cálculo das fórmulas para encontrar os arranjos] numa oitava série"		
M6 comenta: "hoje na oitava série... Eu acho que se iniciar com eles já na quinta vai criando..."	-Iniciar: dar inicio a, começar	Pondera que o estudo das pavimentações pode ter início na quinta série
M9: "é um trabalho que o professor pode fazer um trabalho de integração. Elas o desenho [aponta para as professoras de arte] e a gente a geometria. Deve haver essa integração"	-Integração: ato ou efeito de integrar-se, incorporação de um elemento num conjunto. Integrar: Incluir-se um elemento num conjunto, formando um todo coerente, unir-se formando um todo harmonioso, integralizar-se, complementar-se	Considera importante a integração dos professores de Arte e de Matemática para realização das atividades em sala de aula
Prof. Or.: fala de um trabalho que desenvolveu com uma professora de Arte.		
M9 (retomando a fala de M6): "dá na quinta, na sexta. Na oitava: cálculo. Quando tinha desenho geométrico elas [aponta para as professoras de Arte] ensinavam e a gente o cálculo. A gente não tem mais. A gente trabalhava construção em desenho e cálculo em Matemática. Agora não"	-Cálculo: execução de um processo matemático ou algébrico -Construção: conjunto de atividades	Considera importante a implementação das atividades desde a quinta série, em um trabalho conjunto entre Matemática e

	necessárias para se construir algo	Arte.
Pesq.: faz um gesto positivo para M9		
M9: "que nem na nossa escola do município, que eles colocam menos alunos, você tem mais condição. No estado não, mas no município eu acredito que funcione. Por causa do espaço, ensino, professor integrador..."	-Condição: possibilidades, chance; situação, estado ou circunstância de coisas ou pessoas em determinado momento, conjuntura; antecedente necessário, ou parte dele, sem o qual um evento não ocorre -Funcionar: dar certo, dar bom resultado -Professor integrador: professor contratado pela rede municipal de ensino para auxiliar outros professores em sala de aula	Considera que a Rede Municipal de ensino dá mais condições aos professores do que a Rede Estadual, para o desenvolvimento das atividades propostas nos encontros
Pesq.: concorda que na prefeitura há melhores condições de trabalhar.		
M9: "Você tem livros, teoria, você entendeu, mas prática é muito pouco"	-Teoria: conhecimento de caráter estritamente	Considera que há carência de

	especulativo, desinteressado e abstrato, voltado para a contemplação da realidade, em oposição à prática ou qualquer saber aplicado. -Prática: ato ou efeito de fazer (algo); ação, execução, realização, exercício	atividades práticas para os professores
[pequena pausa] **M9**: "o número de aluno na sala, o material que você consegue. Eles dão condição. No Estado é mais difícil"		Cita outras condições oferecidas pelo município que favorecem a prática do professor
M6: "eu também acho"		Concorda com a colega
M4 (apontando para a disposição das carteiras do seu grupo): "outra coisa importante é o tipo das carteiras"		Considera que o tipo de carteiras é importante no desenvolvimento das atividades propostas
M9: "E agora, também, essa formação das aulas práticas, esse trabalho que a gente tá fazendo. Porque nos cursos a gente tem		Considera que a os encontros estão

muita teoria, muita coisa bonita. Eu acho que não tem a prática”		oferecendo uma formação prática, diferentemente de alguns cursos que realizou
M6: “mas não é. Nós também temos medo de fazer coisa diferente”	-Medo: temor, receio; desejo de evitar, apreensão; preocupação em relação a -Diferente: que apresenta algum aspecto novo ou desconhecido; que não é freqüente, incomum; que se difere do padrão	Lembra que o professor tem receio de realizar atividades diferentes daquelas que são comuns à sua prática
M4: “É o professor que vai, é ele que constrói”	-Constrói: elabora, prepara	Afirma que o professor é o responsável pela elaboração e preparo de uma aula diferenciada e do material necessário para ela
Prof. Or.: fala de sua experiência com os alunos de periferia de uma escola estadual, no período noturno (sua pesquisa de doutorado) **Coletivo**: presta atenção na discussão		

M9: “por isso que eu acho importante a sala ambiente pra você trabalhar isso”. **Prof. Or.**: “é importante o aluno fazer, montar” **M9**: “mas este trabalho tem que ter uma seqüência. A equipe tem que ter uma consciência que quando você começa... Aí é aquele negócio de você seguir o seu aluno”	-Sala ambiente: sala planejada para as aulas de uma disciplina específica -Importante: necessário, fundamental -Seqüência: ato ou efeito de seguir; ato ou efeito dar continuidade ao que foi iniciado; conjunto de cenas ou planos desenrolados num só ambiente ou que tenham determinada unidade de ação -Equipe: conjunto de pessoas que se dedicam à realização de um mesmo trabalho -Consciência: sentido ou percepção que o ser humano possui do que é moralmente certo ou errado em atos ou motivos individuais;	Considera a sala ambiente necessária para desenvolver as atividades Considera importante que as atividades escolares tenham uma seqüência e que para isto é necessário que os professores trabalhem em equipe

	conhecimento, compreensão, discernimento, convicção;	
M6 (que queria falar já a algum tempo) concorda com M9: "a [M9] falou uma coisa que eu acho que é fundamental. É trabalhar numa equipe, de preferência que a gente tenha uma equipe que é aquela equipe da escola. Que na hora do planejamento: 'nós vamos dar geometria?' é importante que todos que estão envolvidos na área falem: 'vamos dar geometria'. Se vai pegar as quintas, então vamos dar no mínimo isso... Senão a gente perde a seqüência. É importante que caminhe junto. Mudou de professor, não tem problema. Mas eu falo pelo menos o básico na quinta, na sexta... Independente do professor, ele deu aquela base"	-Fundamental: que tem caráter essencial e determinante; básico, indispensável -Planejamento: ato ou efeito de planejar; determinação de um conjunto de procedimentos de ações, visando a realização de determinado projeto (escolar) -Envolver: tomar parte em - Importante: necessário, fundamental -Caminhar: passar por ações, processos ou acontecimentos, através de uma sucessão de fatos, desenvolver-se -Junto: juntamente; de modo conjunto, ao mesmo tempo -Básico: primordial,	Considera determinante o trabalho da equipe escolar no planejamento e efetivação do ensino de geometria em todas as séries, seguindo uma seqüência planejada por todos os envolvidos

M9: "E aquele negócio de professor que não gosta de geometria, deixa pro fim do ano e nunca dá nada" **Prof. Or.**: "as vezes não teve, então não vai ensinar" **M9**: "Os conceitos geométricos... às vezes constrói e não sabe fazer a leitura. Aí vê uma fórmula [aponta para as formulas na lousa]: 'ai, que que é isso!'" **Coletivo**: permanece atento às falas dos colegas.	essencial, fundamental	Lembra que há professores que acabam não ensinando geometria Considera as dificuldades em relacionar as fórmulas e os conceitos geométricos

E4-C18: EXPLICITANDO A CENA

A explicação do professor-orientador, sobre as possibilidades de uso dos materiais utilizados nos encontros, gera uma discussão sobre a importância do trabalho coletivo e do planejamento conjunto das ações. Há ênfase na integração entre as duas disciplinas, porém restringem a atuação de cada professor à sua área de formação: os professores de Matemática ensinam os cálculos e as professoras de Arte o desenho. O caráter multidisciplinar das atividades e da geometria ganha destaque e é enfatizada a sua importância nas atividades de ensino, porém as discussões não avançam em direção à realização de um trabalho no qual as disciplinas se inter-relacionem, ultrapassando suas especificidades.

No diálogo destacou-se a importância atribuída ao trabalho da equipe escolar e ao compromisso de todos os envolvidos, desde o planejamento das atividades até a efetivação em sala de aula. Destaca-se que o professor precisa estar consciente de sua responsabilidade com o grupo e com a realização da seqüência planejada, para que o trabalho em sala de aula tenha continuidade. O trabalho em equipe é apontado como um fator essencial para a realização de atividades que envolvam diferentes áreas de conhecimento.

Consideram que o estabelecimento efetivo da geometria no currículo deve ser uma decisão conjunta e compromissada da equipe, para que exista uma seqüência no encaminhamento das atividades. Afirmam que a Rede Municipal de Ensino oferece melhores condições para o professor desenvolver atividades diferentes das tradicionais, se comparadas às escolas da Rede Estadual. Dentre essas vantagens, citam, por exemplo, espaço físico, auxílio de outro professor, número reduzido de alunos por sala, fornecimento de material e carteiras apropriadas. Há unanimidade entre os professores-alunos com relação às diferenças entre as distintas escolas em que lecionam.

Uma professora-aluna lembra que é importante considerar a insegurança dos professores na realização de atividades "diferentes" daquelas que são comuns à sua prática. Não basta condições favoráveis, o professor deve estar disposto a se "arriscar" em novas metodologias de ensino, ou seja, a caminhar para uma *zona de risco* (BORBA & PENTEADO, 2003). Foi ressaltado que o professor é o responsável pela elaboração e preparo da aula e do material necessário. Isso, de certa forma, poderia colaborar com a ausência do uso de recursos diversificados, pois exige mais empenho do professor que, geralmente, tem uma elevada carga horária de trabalho, não restando tempo para se dedicar à sua preparação.

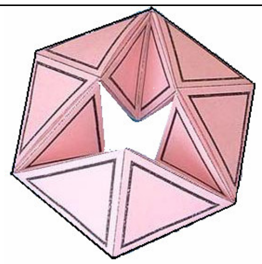
Apontam a carência de atividades práticas para que os professores possam aplicar em sala de aula, ressaltando que os cursos de capacitação, muitas vezes, apresentam teorias que não os auxiliam em sua prática.

CENA 19: fazendo associações

No fim do encontro a pesquisadora pergunta aos professores-alunos se já conheciam o material utilizado para o desenvolvimento das atividades.

E4-C19

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Coletivo: é unânime em afirmar que não **M6**: "Sabe o que eu tinha? O caleidociclo [fig]. Eu ia trazer e acabei esquecendo. Eu trabalhei, e é super interessante"	- Interessante: que desperta interesse, que motiva; que se revela útil; que traz vantagem	Faz considerações relativas ao material que conhecia, o caleidociclo, e à sua pretensão de

 **Prof. Or.**: “é geometria espacial. Eu tenho um trabalho, já trabalhei” **M6**: “mas dá muita coisa diferente”	 -Diferente: que se distingue; que não é semelhante, igual ou idêntico; que apresenta algum aspecto novo ou desconhecido	apresentá-lo ao grupo. Explica que com o caleidociclo é possível desenvolver atividades diferentes

E4-C19: EXPLICITANDO A CENA

Os professores-alunos não conheciam os materiais abordados nesse encontros, porém, a professora-aluna associa um material que conhecia, o caleidociclo, à possibilidade de desenvolver atividades diversificadas das tradicionais, relacionando-o com o material que estávamos apresentando no curso. Ela manifesta sua intenção de apresentá-lo para o grupo.

QUINTO ENCONTRO (E5)

Com régua e compasso, os professores construíram bases caleidoscópicas para visualização de pavimentações por triângulos eqüiláteros e depois as pintaram. Também desenvolveram outras atividades relacionadas às transformações geométricas.

Estavam presentes: A8, A10, A11, M1, M2, M4, M6, M7, M9 e M12.

CENA 20: compartilhando a experiência

No início do encontro, M7 apresenta para o grupo as bases feitas por seus alunos.

E5-C20

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M7 comenta o uso dos caleidoscópios: "usei como motivador para outros estudos em geometria" **Pesq.**: Observa os desenhos feitos pelos alunos de M7 **Coletivo**: se interessa pela experiência de M7, questionando-o e observando os desenhos.	-Motivador: que ou o que motiva	Explica que utilizou o caleidoscópio para motivar o interesse dos alunos pela geometria

E5-C20 EXPLICITANDO A CENA

O professor-aluno compartilha, com a pesquisadora e com os colegas, a sua experiência em sala de aula com o material que recebeu no encontro passado, o caleidoscópio. As bases feitas por seus alunos, quando colocadas entre os espelhos, geram belos visuais que atraem a atenção dos presentes. Outros professores-alunos se interessam em saber mais sobre a sua experiência, questionando-o.

CENA 21: discutindo possibilidades de construção da bissetriz

A construção das bases para a visualização de uma pavimentação por triângulos exigia a determinação da bissetriz do triângulo base eqüilátero. Inicia-se um diálogo sobre as possibilidades de ação em sala de aula com seus alunos.

E5-C21		
Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
A8 chama a pesquisadora e pergunta: "faz eles [os alunos de A8] usarem régua e compasso para traçar a bissetriz ou só marca o ponto médio mesmo?"	-Traçar: fazer ou representar por meio de traços; fazer esboço, esboçar	Questiona os procedimentos que devem ser exigidos dos alunos na construção da bissetriz
Pesq.: "pode dobrar, também, né"		
A10 (que estava sentada ao lado de A8): "depende do que você tá trabalhando, né, da série..."	-Depender: estar sujeito (a fatores objetivos, circunstâncias, situação); surgirem decorrência em conseqüência	Considera que a exigência dependerá do conteúdo e da série considerados

E5-C21: EXPLICITANDO A CENA

Durante a resolução das atividades, surge uma preocupação relacionada às exigências que devem ser feitas aos alunos para a construção da bissetriz, já que ela poderia ser construída de diversas maneiras, por ser a base um triângulo eqüilátero: com régua e compasso, ligando-se o ponto médio de um dos lados ao vértice oposto a ele ou dobrando a folha de modo a marcar a bissetriz.

Avaliam que a cobrança de determinado procedimento dependerá da análise do contexto em que ela é realizada, e, por isso, é necessário considerar as habilidades que se pretende trabalhar junto ao aluno, bem como a série em que as atividades serão desenvolvidas.

CENA 22: sobre seus alunos

Inicia-se uma discussão sobre a carência dos alunos que freqüentam as escolas da Rede Pública de Ensino. Mas, a carência aqui considerada é a afetiva.

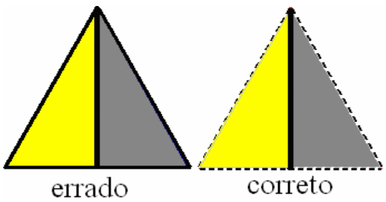
E5-C22		
Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Coletivo: comenta a falta de recursos financeiros dos alunos e problemas familiares que eles enfrentam		Comentam sobre as carências dos seus alunos
M6: "eles correm e abraçam a gente"		Fala das manifestações afetivas dos alunos
Coletivo: discute a aprendizagem dos alunos em meio a esses problemas		Discutem a aprendizagem dos alunos

E5-C22: EXPLICITANDO A CENA

As escolas da Rede Municipal estão localizadas nos bairros de periferia, afastados da região central da cidade, sendo que seus os alunos, em geral, pertencem às classes economicamente baixas. A cena revela a presença de professores preocupados, cuja prática educacional vai além do limite do ensino dos conteúdos, e que consideram a realidade de seus alunos e o papel relevante de suas ações no cotidiano de cada um deles.

CENA 23: colorindo as bases

Durante a coloração das bases para a visualização da pavimentação por triângulos eqüiláteros uma professora de Arte questiona os procedimentos efetuados.

E5-C23		
Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
A9: "não é pra reforçar as linhas da base, né, senão os triângulos ficam divididos" [fig]  **Pesq.**: concorda e elogia sua observação	-Reforçar: dar mais intensidade; intensificar	Questiona o reforço das linhas da base caleidoscópica eqüilátera

E5-C23: EXPLICITANDO A CENA

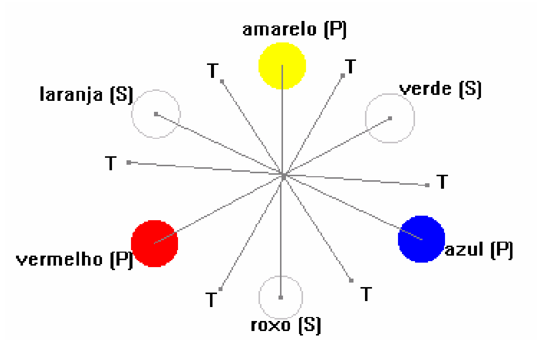
A professora-aluna de Arte é a única que se manifesta sobre a pintura da base: ela constata que, com o reforço das linhas laterais da base, a visualização nos caleidoscópios gera triângulos eqüiláteros partidos ao meio. Alguns professores não notam a importância de se atentar para o processo de coloração. Após o apontamento da professora de Arte, eles "testam" suas bases no caleidoscópio, verificando que esse cuidado na coloração é necessário para que encontrem a pavimentação desejada.

CENA 24: compartilhando conhecimentos artísticos

No grupo maior, alguns professores-alunos de Matemática terminam rapidamente a atividade de construção das bases.

E5-C24

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M2: "acho importante entender. Pintar, eu pinto mais tarde"	-Entender: compreender, captar; ter experiência em, saber	Considera importante compreender a atividade e adia a pintura da base
Pesq.: percebe que as professoras de Arte fazem questão de caprichar em cada detalhe da pintura.		
A8: "ficaria horas pintando"		Manifesta seu prazer em pintar
Pesq.: elogia a base que A8 estava colorindo		
A8: oferece-se para explicar a combinação de cores que usou para colorir a base. Vai ao quadro e faz uma explicação sobre cores complementares e análogas. Fala do círculo cromático, fazendo um esquema parecido com a figura abaixo para		Compartilha seu conhecimento artístico com os colegas

explicar sua construção a partir das cores primárias.  **Coletivo**: todos prestam muita atenção na explicação de A8. **A8**: fala sobre a combinação de cores análogas e cores opostas. **Coletivo de Mat. e Pesq.** perguntam para **A8**: porque primária? E o marrom, o preto, o bege... **A8** explica ao grupo e fala sobre a cromoterapia. [algum tempo depois] **Pesq.**: observa que A8 e A10 (que estavam desenvolvendo as atividades juntas) pintaram a base com lápis de cor com uma técnica diferente, como se houvesse uma textura na pavimentação, que chamou a atenção dos demais.		Os colegas ficam atentos à explicação Fazemos diversos questionamentos referentes às cores Continua a compartilhar com o grupo seus conhecimentos sobre cores

E5-C24: EXPLICITANDO A CENA

A atividade evidenciou duas formas distintas de concebê-la: a professora-aluna de Matemática, objetiva na resolução das questões matemáticas envolvidas, parece considerar a pintura um processo supérfluo na atividade, enquanto a professora-aluna de Arte manifesta o seu prazer em pintar.

A disposição da professora-aluna de Arte em apresentar para o grupo o círculo cromático possibilitou um momento enriquecedor, no qual discutimos e esclarecemos algumas dúvidas. Todos ficam atentos à explicação sobre as cores, proferida pela professora-aluna de Arte.

Combinando elementos como linhas e cores, as professoras-alunas de Arte obtêm um lindo visual nos caleidoscópios. A beleza desse visual chama a atenção dos demais e se estabelece um contato entre os espectadores e os criadores: os professores-alunos compartilham informações, habilidades e recursos.

CENA 25: criatividade – dialogando com A8 e A10

A pesquisadora revela para A8 e A10 que nunca se destacou em Educação Artística, sendo que suas pinturas eram simplórias. Pergunta às professoras-alunas como elas procederiam em sala de aula, com seus alunos, para a coloração das bases.

E5-C25

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Pesq.: "como faria a pintura com seus alunos?"		
A10: "daria algumas dicas, mas deixaria que o aluno criasse. Surgem muitos trabalhos maravilhosos, independente, muitas vezes, da intervenção do professor"	-Dica: informação ou indicação boa -Criar: imaginar, inventar, produzir, -Intervenção: ato de intervir (interferir, interceder)	Considera que, independentemente da intervenção do professor, podem surgir belos trabalhos entre os alunos
Pesq. insiste: "mas, como seria possível despertar a criatividade do aluno?		
A10: "muitas vezes através de um elogio".	Elogio: discurso favorável que se exprime em favor de alguém	Considera que um elogio pode estimular a criatividade do aluno

E5-C25: EXPLICITANDO A CENA

A professora-aluna aponta caminhos para o desenvolvimento das atividades e menciona uma possibilidade de estimular a criatividade do aluno: por meio de um (simples) elogio. Destaca-se, na discussão, a importância das ações do professor diante de seus alunos, para o encaminhamento das atividades em sala de aula. O *cuidado com* seu aluno evidencia-se no diálogo com as professoras-alunas.

SEXTO ENCONTRO (E6)

Neste encontro foram desenvolvidas atividades com os tetraminós. Foram utilizados quadrados unitários e tetraminós feitos de borracha e papel quadriculado para representação das soluções.

Estavam presentes: A3, A8, A10, M1, M2, M4, M6, M7, M9 e M12.

CENA 26: sobre os poliminós

O professor-orientador fala sobre os poliminós: sua definição, os tipos e as possibilidades educacionais. Após, explica como foram confeccionadas as peças e questiona a definição de tetraminó.

E6-C26

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Prof. Or.: "o que é um tetraminó?"		
M6: "seriam quatro..."		
Pesq.: "quatro o quê?"		
M6: "mino"		Faz uma analogia com o dominó
Pesq.: "quatro monominó". E explica que há um tipo de monominó, um tipo de dominó e dois de triminós.		
M7: "existe uma regra para encontrar a quantidade de cada tipo de poliminó?"	-Regra: aquilo que regula, dirige; norma	Questiona a existência de uma regra matemática para determinar a quantidade de cada tipo de poliminó
Prof. Or.: explica que existem estudos sobre os poliminós, mas que não foi encontrada uma regra matemática para determinar a quantidade de n-minós		

M5: “é importante saber que existem pesquisas sendo desenvolvidas nessa área, porque às vezes a gente acha que já está tudo pronto”	-Pronto: concluído, terminado	Considera importante saber que existem estudos sobre poliminós, pois muitas vezes considera-se que os estudos na área estão concluídos
M1: “nas olimpíadas de matemática tinha problemas com poliminó”	-Problema: tarefa de calcular (matemática)	Lembra que na olimpíada brasileira de matemática havia questões envolvendo os poliminós
Prof. Or.: explica como foram confeccionadas as peças e comenta que a quantidade de tetra, penta e hexaminós são, respectivamente, 7, 36 e 107		
M2: fala para a pesquisadora que trabalhou os poliminós com seus alunos, porém sem denominá-los: “sabia que eram muitos, mas não imaginava que eram tantos”	-Imaginar: chegar a (alguma conclusão); descobrir; fazer idéia de (algo)	Manifesta-se surpresa ao saber qual é a quantidade de cada tipo de poliminó

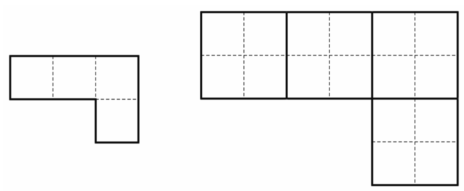
E6-C26: EXPLICITANDO A CENA

Os professores-alunos demonstram interesse pelo tema abordado no encontro: os poliminós. Desejam saber se existe uma fórmula matemática para determinar a quantidade de cada tipo de poliminó e ficam surpresos com a quantidade existente. Destacam a importância da explicação do professor-orientador sobre os poliminós e sobre as pesquisas sobre o tema, pois, muitas vezes, considera-se que os conteúdos curriculares estão concluídos, não havendo nada mais a ser pesquisado. O conhecimento é dinâmico. A idéia de exatidão matemática pode ocultar a existência de muitos assuntos a serem pesquisados na área.

CENA 27: personalizando as soluções

Nessa atividade, os professores-alunos devem identificar e registrar todos os tipos de tetraminós, tendo à sua disposição quadrados feitos em cartolina.

E6-C27

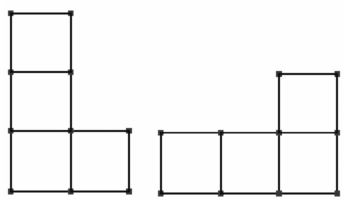
Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
A8: solicita canetinhas e lápis de cor para representar as soluções no papel quadriculado. **Pesq.**: nota que outros professores-alunos passaram a registrar as soluções usando canetinhas. **A8** e **A10** utilizam quatro quadradinhos do papel quadriculado como unidade quadrada (fig) e muita cor para representar as soluções. 		Representam a solução utilizando quatro quadradinhos para cada quadrado unitário

E6-C27: EXPLICITANDO A CENA

As professoras-alunas de Arte solicitam material para colorir as soluções. Destaca-se a beleza da representação que fazem no papel quadriculado: os tetraminós maiores e harmoniosamente coloridos, chamando a atenção dos colegas e levando outros professores-alunos a aderirem à prática de colorir as soluções e as ampliarem.

CENA 28: rotação

Houve confusão na atividade de identificação dos sete tipos de tetraminós. Alguns professores-alunos, ao registrarem as soluções no papel quadriculado, consideram que tipos idênticos, por estarem em posições diferentes, são distintos (fig)



E6-C28

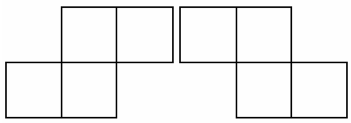
Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Pesq.: nota que alguns professores-alunos registram o mesmo tetraminó mais de um vez, mas em posições diferentes		
M6: “mas tem mais de sete”		Verifica que encontrou mais tetraminós que o esperado
Pesq.: usa os quadrados de cartolina e explica nos grupos que algumas peças desenhadas no papel coincidem por rotação		
Coletivo: verifica a solução da atividade e faz as alterações, quando necessário		

E6-C28: EXPLICITANDO A CENA

Nessa atividade, revelaram-se incompreensões na identificação dos tetraminós. A representação (estática) dos tetraminós no papel quadriculado parece ter colaborado com o engano. O material manipulável teve um papel importante na explicação e esclarecimento das dúvidas. O uso dos quadrados unitários para formar os tetraminós e a rotação dos mesmos contribuíram com o processo de determinação dos diferentes tipos, possibilitando a identificação dos tetraminós idênticos e dos enantiomorfos.

CENA 29: rotação no espaço

M7 explica para a pesquisadora que considera o tetraminó Z e o Z invertido (fig), como sendo do mesmo tipo.



E6-C29

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M7: aponta para os tetraminós Z e Z invertido e afirma: “pra mim é a mesma peça...”	-Mesma: de igual identidade, não outro; idêntico	Considera que as peças são idênticas

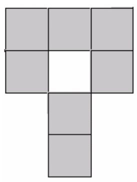
Pesq: “por quê?” **M7** faz um movimento com as peças: tira uma delas do plano da carteira e a rotaciona no espaço, até que ela coincida com a outra. **Pesq.**: explica que há autores que consideram as peças como sendo idênticas, de forma que haveria cinco tipos de tetraminós, porém, como estamos trabalhando com pavimentações do plano, optamos por considerá-las enantiomorfas, existindo sete tipos os tetraminós.		Justifica sua afirmação por meio de uma transformação geométrica

E6-C29: EXPLICITANDO A CENA

Inicialmente, não discutimos o conceito de tetraminós enantiomorfos com o grupo. Contudo, o tema emergiu durante o desenvolvimento das atividades, talvez em decorrência da atividade anterior, apresentada na cena 28, na qual a rotação “denunciava” peças idênticas. Com os tetraminós de borracha nas mãos, o professor-aluno manifesta seu entendimento sobre dois tipos congruentes e explica para a pesquisadora a sua conclusão, rotacionando-os (espacialmente), de forma que coincidissem.

CENA 30: questionando a definição de poliminó

No início do encontro, a pesquisadora desenhou na lousa a representação de uma figura composta por sete quadrados cheios (fig) e explicou que ela não era considerada um poliminó.



E6-C30

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M7, observando o desenho, questionou a definição de poliminó do texto que receberam: “Aqui tá ‘os poliminós são formados pela conexão lado-a-lado de quadrados congruentes’. Então essa figura é		Analisa a definição contida na apostila e considera que a figura representada na lousa é um

um heptaminó, sim.” **Pesq.**: consulta a apostila *Poliminós* (BARBOSA, 2005): ‘são figuras geradas pela conexão lado-a-lado de réplicas congruentes de um quadrado’		tetraminó
M7 e **Pesq.**: concluem que, a partir de um quadrado, deve-se acrescentar outros tendo, pelo menos, um lado em comum com algum dos já colocados.		Verificamos, conjuntamente, que a definição contida no texto não está correta
M7: “então não é. Mas tem que mudar aqui [aponta para a definição do texto]”	-Mudar: modificar as características essenciais; trocar por outro, substituir	Considera a necessidade de corrigir a explicação contida no texto
Coletivo: observa a discussão e faz a correção necessária no texto		

E6-C30: EXPLICITANDO CENA

Ao elaborarmos o texto para os encontros, não nos atentamos para a falha da definição, já que, na geração dos tetraminós, não ocorrem “buracos” e a definição sugerida parecia ser satisfatória. O professor-aluno, sempre atento às informações contidas no texto que recebeu, questiona a definição, pois o poliminó que desenhamos a satisfazia. A partir de sua observação, reelaboramos conjuntamente a definição de poliminó. Os outros professores-alunos ficam atentos à discussão e fazem as correções necessárias em seus textos.

CENA 31: relacionando com o tétris

E6-C31

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
A3 monta um retângulo com as peças: “parece aquele jogo que vai caindo as peças. Como é mesmo o nome?” **Pesq.**: “o tétris?” **A3**: “isso”		Associa os tetraminós ao jogo tétris.

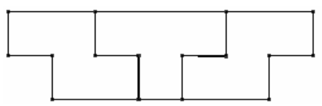
E6-C31: EXPLICITANDO A CENA

Antes que a pesquisadora explicasse que as atividades com os tetraminós poderiam ser complementadas com esse jogo eletrônico, a professora-aluna faz essa associação.

CENA 32: sobre as faixas

Uma atividade questionava a possibilidade de se formar uma faixa cheia[14], de largura dois, com três tipos de tetraminós.

E6-C32

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M2 e **M6**: fazem o seguinte arranjo, usando os tetraminós emborrachados  e concluem que, com este arranjo, não é possível formar uma faixa cheia.		Encontram um arranjo composto de três peças, mas consideram que ele não satisfaz a atividade proposta
Pesq.: explica que uma faixa tem largura finita, mas tem comprimento infinito.		
M2: "mas eu sei que no fim vai ficar um buraco"	-Fim: extremidade, limite - Buraco: espaço vazio, cavidade, depressão; abertura	Conclui que no "fim" da faixa haverá uma abertura e por isso ela não será cheia
Pesq.: "mas se não tem fim?" [risos]		
M6: "se já é difícil pra gente que tem uma formação, imagina pros alunos"	-Difícil: que demanda esforço intelectual para ser compreendido	Considera a atividade de difícil compreensão, principalmente para

[14] Ver página 47

	-Formação: conjunto dos cursos concluídos e graus obtidos por uma pessoa -Imaginar: conceber idéia	seus alunos

E6-C32: EXPLICITANDO A CENA

Essa atividade gerou uma interessante discussão entre a pesquisadora e as professoras-alunas de Matemática quanto à definição de uma faixa cheia: o arranjo utilizado na composição da faixa pode apresentar lacunas e mesmo assim pavimentar uma faixa infinita. As dúvidas podem ter sido ocasionadas por terem relacionado essa atividade com uma outra, na qual deveriam verificar se é possível formar um retângulo (região limitada do plano) com tetraminós Z, procedimento impossível, pois haveria lacunas. Elas comparam suas dificuldades com as que seus alunos poderiam apresentar numa atividade como essa, trazendo suas experiências da prática docente para os encontros.

CENA 33: analisando possibilidades (ii)

Desde o primeiro encontro, A3 manifestou seu interesse pelos fractais. No encontro anterior, ela fez comentários sobre um artista que aborda o assunto em suas obras. Ela já havia falado para a pesquisadora que iria trabalhar com seus alunos da seguinte forma: numa tela "jogaria" diversas cores de tinta, recortaria um pedacinho e, ampliando, pediria que verificassem a semelhança com o todo. A pesquisadora emprestou para ela o livro *Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula* (BARBOSA, 2002) explicando que a abordagem era, basicamente, geométrica. O professor-orientador fala sobre o trabalho de mestrado desenvolvido por seu orientando (GOUVEIA, 2005) envolvendo os fractais de bases caleidoscópicas. Após, apresenta para os grupos o jogo de bases caleidoscópicas (ALMEIDA, 2003).

E6-C33

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Coletivo: quer saber como as peças foram feitas.		Aparentam interesse pela confecção das peças

Pesq. Fala que as peças foram feitas no *Cabri-Géomètre II* e se compromete a trazer as instruções sobre a confecção, no próximo encontro. [algum tempo depois, quase no fim do encontro, o grupo menor chama a pesquisadora]		
M4 fala para a pesquisadora: "tudo isso é muito interessante, mas quando a gente vai fazer isso [apontando para o jogo de bases caleidoscópicas]? No fim de semana?"	-Interessante: que desperta interesse, que motiva	Considera a falta de tempo dos professores para confeccionarem as peças
Pesq.: concorda com M4 e explica que os tetraminós eram mais simples de confeccionar que as bases caleidoscópicas. Comenta que, em alguns casos, os próprios alunos poderiam fazer as peças e que ainda é possível ensinar conceitos de geometria nesse processo de confecção. Fala da sua experiência junto aos seus alunos do Ensino Fundamental		
M4: "é, pega aqueles alunos melhores"	-Melhor: aquilo ou aquele que em seu gênero é considerado superior	Analisa a possibilidade de confeccionar as peças junto com os "bons" alunos
Coletivo do grupo menor: discute a possibilidade de "treinar" os alunos para ajudarem na confecção das peças. Citam os nomes de alguns alunos considerados "bons"		

M5: “mas, os mais bagunceiros é que são bons nisso”	-Bagunceiro: aquele que faz ou gosta de bagunça (confusão, desorganização)	Considera que os alunos avaliados como bagunceiros podem auxiliar os professores na confecção das peças
A11: “pede ajuda pro professor integrador”	-Ajuda: subsídio, reforço -Professor integrador professor contratado pela Rede Municipal de ensino para auxiliar outros professores em sala de aula	Lembra que os professores do município podem contar com o auxilio do professor integrador
M4: “seria interessante se houvesse dois professores na sala”	-Interessante: que se revela útil; que traz vantagem	Considera importante a ajuda de outro professor
Pesq.: “qual é o número de alunos por classe nas salas de aula da prefeitura?”		
M5: “em média tinha 29 alunos. É menos que no estado”		Lembra que o número de alunos por sala de aula na Rede Municipal é menor que na Estadual
Pesq.: se afasta do grupo menor e coloca a seguinte questão para todos os professores-alunos: “será que é possível		

fazer as peças com os alunos?". Explica que um colega havia ressaltado um ponto importante a se considerar: a falta de tempo do professor **Coletivo**: reponde positivamente		
M6: "é muito variável de turma para turma. Tem quinta série que é possível e oitava que não...".	-Variável: é sujeito à variações ou mudanças	Considera que a possibilidade de confeccionar as peças com os alunos dependerá da classe.

E6-C33: EXPLICITANDO A CENA

A partir do manifesto do professor-aluno com relação à falta de tempo dos professores para estarem confeccionando as peças, inicia-se uma discussão sobre a possibilidade de contarem com a ajuda dos seus alunos para confeccionarem as peças e desenvolveram as atividades. Lembram que nas escolas do Município podem contar, ainda, com a contribuição do professor integrador e parecem considerar importante o auxílio de outro professor para desenvolveram as atividades em sala de aula.

A aula expositiva demanda menos tempo para preparação do que aquelas envolvendo materiais manipuláveis, nas quais pode ser necessário confeccionar tais materiais. O excesso de aulas evidenciou-se como um forte obstáculo contra a realização de atividades do tipo das apresentadas nos encontros em sala de aula. Porém, na discussão, conjuntamente, os professores-alunos vislumbram formas possíveis de contornar tal situação e discutem possibilidades de ação, envolvendo, inclusive, a participação de seus alunos.

SÉTIMO ENCONTRO (E7)

Neste encontro foram desenvolvidas atividades sobre as pavimentações aperiódicas de Penrose e a razão áurea. Assistimos ao vídeo da série *Arte & Matemática*[15], que apresenta situações cotidianas relacionadas ao número áureo. Na sala de informática, foram realizadas construções no software *Cabri-Géomètre II*.

Estavam presente: A3, A11, M1, M2, M5, M6, M9 e M12.

CENA 34: o intrigante número áureo

Iniciamos o encontro assistindo ao vídeo.

E7-C34

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
[fim do vídeo]		
M5: "'Donald no país da matemática' também fala do número áureo, mas é mais pra criança. Esse é melhor para alunos de sétima e oitava"	-Melhor: aquilo que em seu gênero é considerado superior	Considera o vídeo apropriado para alunos de sétimas e oitavas séries, comparado a outro que conhecia
Coletivo: discute as situações apresentadas envolvendo o número áureo		O número áureo intriga os professores-alunos
M6: "eu acho que é coincidência na poesia"	-Coincidência: ato ou efeito de coincidir; por acaso	Considera que a relação entre o número áureo e a poesia é apenas coincidência
M1 pede emprestada a fita para a pesquisadora para apresentar aos seus	-Fechamento: finalização	Solicita a fita para finalizar um trabalho

[15] Mais informações podem ser obtidas no endereço eletrônico:
http://www.tvcultura.com.br/artematematica/home.html

alunos: "Eu tô fazendo um trabalho sobre 'beleza grega' com os alunos da oitava série e eu queria fazer um fechamento do trabalho com os alunos. A fita vai dar certinho" **M5**: comenta sobre um porta-retrato áureo que confeccionou no curso de extensão que estava realizando	-Dar certo: de maneira exata, precisa; aquilo que é certo, correto	que está desenvolvendo com seus alunos Fala de uma atividade que desenvolveu e que tem relação com o tema do encontro

E7-C34: EXPLICITANDO A CENA

As professoras-alunas manifestam-se surpresas com as inúmeras relações do número áureo em situações cotidianas, como as apresentadas no vídeo. No fim da apresentação, a discussão foi intensa. Consideram que o vídeo pode ser utilizado na realização de trabalhos envolvendo Matemática e Arte nas séries finais do Ensino Fundamental. Houve entusiasmo com a apresentação da fita para os seus alunos, por isso solicitam à pesquisadora que providencie uma cópia da mesma para as escolas da Rede Municipal em que lecionam. A utilização da razão áurea nas obras de diversos artistas parece ter impressionado os professores-alunos, que ficaram atentos aos detalhes do vídeo.

CENA 35: construção e precisão

Uma atividade pede que construam o segmento áureo com régua e compasso e determinem a razão entre as medidas do maior e do menor segmento. Porém, em alguns casos, a razão não é um valor próximo de 1,6.

E7-C35

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M5 (calculando a razão): "mas dá, tem que dar. Se não dá é a construção. Nós temos uma perpendicular que não é perpendicular. Se não bate, é a reta que não está reta"	-Bater: atingir, alcançar	Justifica que a construção imprecisa pode levar ao erro na determinação da razão áurea

Pesq.: "e como fala pro aluno?" **M5**: "tem problemas na construção geométrica, ué. É assim que constrói. Se não der, tá com problema na construção" **Pesq.**: "fala direto"	-Problema: obstáculo, contratempo, dificuldade que desfia a capacidade de solucionar de alguém -Construção: conjunto de atividades necessárias para se construir algo	Considera que os problemas de construção devem ser apontados aos alunos, diretamente

E7-C35: EXPLICITANDO A CENA

Discutimos a construção do segmento áureo, mas a imprecisão, ainda que mínima, da construção geométrica acarretou alguns erros, que se evidenciaram ao conferirem as razões entre as medidas dos segmentos. A professora-aluna enfatiza a importância da precisão da construção, para que o problema não fique sem justificativa. Ressalta-se a necessidade de mostrar ao aluno os motivos que acarretam resultados diferentes dos esperados.

CENA 36: auxiliando as colegas

A pesquisadora observa que duas professoras-alunas de Matemática do grupo menor apresentam dificuldades na resolução das atividades.

E7-C36

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
Pesq.: nota que M12 e A11 estão "incomodadas" por não conseguirem fazer a construção do segmento áureo **M12** e **A11**: pedem auxílio para M5		Pedem auxílio para a colega do grupo

M5 auxilia as professoras. Pega o compasso e faz uma parte da construção na folha de M12: "é só acostumar"	-Acostumar: habituar-se, afazer-se	A colega se dispõe a explicar a construção e apóia as colegas

E7-C36: EXPLICITANDO A CENA

As professoras-alunas não solicitam o auxílio da pesquisadora. Seus gestos sinalizam que consideram as atividades complicadas e que não estão conseguindo realizar a construção. Ao solicitarem a ajuda da colega do grupo, esta se coloca à disposição e dá assistência necessária para a resolução das atividades. A professora-aluna, que auxilia as colegas, parece ter facilidade em realizar o que era pedido por já conhecer a razão áurea e a sua construção.

CENA 37: sobre as pavimentações de Penrose

As professoras-alunas demonstraram interesse pelo tema do encontro.

E7-C37

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
A3 (que estava montando uma pavimentação): "é mais interessante que o tangran. É difícil, tem que quebrar a cachola"	-Difícil: que demanda esforço intelectual para ser compreendido -Cachola: cabeça (parte do corpo, centro do intelecto, inteligência)	Compara a pavimentações de Penrose ao tangran
M7 (apontando para as peças): "como você fez?"		Quer saber como as peças foram feitas
Pesq.: explica que foram feitas no *Cabri-Géomètre II* e que havia uma atividade, no texto que receberam, envolvendo a construção das peças. Comenta que há muito material sobre as pavimentações de Penrose em sites e revistas, mas que a maioria é em inglês.		

M5: "qual é o endereço?" **Pesq.**: Escreve alguns endereços na lousa. **Coletivo**: anota os endereços		Querem mais informações sobre as pavimentações de Penrose

E7-C37: EXPLICITANDO A CENA

A atividade é comparada à outra atividade de pavimentação parcial do plano, o tangran. As professoras-alunas querem saber mais sobre a confecção das peças que formam as pavimentações de Penrose. A pesquisadora explica que foram feitas no *Cabri-Géomètre II* e que havia uma atividade de construção das peças. Demonstram interesse em conhecer mais sobre o tema do encontro.

CENA 38: sobre o certificado do curso

A3 fala sobre a importância do certificado que lhes será outorgado ao fim do curso.

E7-C38

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
A3: "sabia que o curso vai contar pra evolução funcional do Estado?"		Afirma que o certificado do curso contará pontos para a evolução funcional dos que atuam nas escolas estaduais
Pesq.: "vai?" **A3**: "por causa da carga horária" **Coletivo**: comenta que o certificado também valerá pontos para a classificação dos professores-alunos na Rede Municipal		O certificado auxiliará os professores-alunos

E7-C38: EXPLICITANDO A CENA

A professora-aluna faz considerações a respeito das vantagens do certificado a ser recebido quando da conclusão do curso, o qual contará pontos para a classificação dos professores-alunos. Isso parece ter estimulado, de alguma forma, a participação no curso.

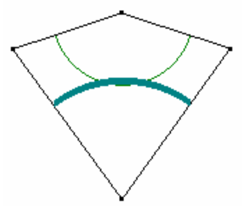
CENA 39: discutindo ações

M5 demonstra muito interesse pelas atividades e deseja saber mais sobre elas.

E7-C39

Descrição da Cena	Explicitação dos termos utilizados	Asserções articuladas pela pesquisadora
M5 pergunta: "como faz pra achar o número áureo na pavimentação"	-Achar: encontrar; passar a conhecer, realizar	Questiona a determinação do número áureo
Pesq.: explica que basta dividir a quantidade de kite pela de dart e esse número se aproxima da razão áurea à medida que a região pavimentada aumenta.		
[grupo de M5 faz alguns cálculos]		
Pesq. observa o grupo e comenta: "numa pavimentação infinita dá exatamente o número áureo"		
M5: "tem como provar?"	-Provar: demonstrar a verdade, a realidade ou a autenticidade de uma coisa com razões	Quer saber se é possível provar que a razão entre kites e darts é áurea
Pesq.: explica que trata-se de um cálculo muito complicado		
M5: "tudo bem. Mas existe"		Considera que é importante saber que a prova existe

Coletivo grupo menor: juntam as peças para fazer uma única pavimentação e a fim de calcular a razão entre a quantidade das peças.		Trabalham conjuntamente, para determinar a razão ,
M5: "eu acho que agora a gente tinha que pedir uma continuação do curso... [risos] "	-Continuação: ato ou efeito de dar seguimento ao que foi iniciado	Deseja que o curso tenha continuidade
M5: "fala do número áureo e aí trabalha essa pavimentação?"		Quer saber como utilizar as atividades em sala de aula
Pesq.: "isso que nós pensamos [pesquisadora e professor-orientador]" **M5**: "eu posso tá mostrando a pavimentação"		Cogita a possibilidade de apresentar as pavimentações aos alunos
Pesq.: "antes ou depois?" **M9**: "acho que teria que passar o filme. Eu acho que eles vão ter mais criação se eles verem o filme e ver que a gente pode criar. O visual depois o concreto. Ele tem mais criação, não tem? Que nem um quebra cabeça: tem aluno que não monta, não joga, não gosta de jeito nenhum."	-Criação: ato, processo ou efeito de criar -Visual:obtido ou mantido através da visão -Concreto: ligado à realidade, o que é palpável -Gostar:julgar bom;	Sugere que o filme seja apresentado aos alunos antes das atividades, pois poderá estimular o ato criador, e compara a pavimentação a um quebra-cabeça, relacionando o

	ter habito, costume ou mania de	interesse dos alunos
Pesq.: “eu pensei: vídeo, depois como fazer, e monta”		
M5: “tem que levar pronta? Fazer a peça? Mas e a curva da peça [aponta para a curva de uma peça (fig)]?” 	-Pronto: inteiramente feito, em condições de ser utilizado, construído, terminado,	Questiona a construção das curvas nas peças
Pesq.: “dá pra fazer no Cabri”		
M9: “fazer [as peças] com eles é uma eternidade. Faz no Cabri e eles montam”	-Eternidade: tempo muito longo	Considera que fazer as peças com os alunos demanda muito tempo, sendo melhor levá-las prontas
M5 (anotando a seqüência discutida para a aplicação das atividades): “depois introduz a pavimentação”	-Introduzir: inserir, divulgar	Anota a seqüência sugerida para a realização das atividades
Pesq.: mostra os arranjos do texto e explica que as pavimentações devem começar por eles.		
M5 anota a página em que os arranjos são apresentados, no texto que receberam		

M8: "depois o mosaico"		Considera que os mosaicos de Penrose devem ser trabalhados após as etapas discutidas
M5: "Mas como eu penso, a gente trabalha estimativa, contando as peças"	-Estimar: fazer estimativa, avaliar, calcular	Considera a possibilidade de trabalhar estimativas da razão áurea, contando a quantidade das peças
Pesq. : faz um gesto positivo **M9** aponta para a pavimentação que **A3** e o **noivo de A3** haviam montado: "tem aluno que é persistente" [risos]	-Persistente: que persiste	Considera os colegas persistentes, pois eles pavimentam uma grande superfície com as peças de cartolina

E7-C39: EXPLICITANDO A CENA

O interesse pelo tema do encontro leva as professoras-alunas e a pesquisadora a analisarem as etapas de desenvolvimento das atividades com os alunos, em sala de aula, numa análise conjunta, a qual nos remete à nossas experiências em sala de aula e às possibilidades de nossos alunos. As professoras-alunas vislumbram possibilidades de ação e planejam a seqüência das atividades, buscando maneiras de dinamizar a realização do trabalho educacional com as atividades propostas.

CAPÍTULO 5: COMPREENDENDO E REFLETINDO SOBRE A EXPERIÊNCIA

5.1 A Análise Nomotética e o Movimento Realizado

A análise nomotética é um trabalho de redução[16], no qual o pesquisador busca as convergências das unidades de significado que apontarão aquilo que se mantém, que é essencial ao fenômeno questionado, mostrando sua estrutura.

Nesse momento, partimos da análise dos individuais e nos dirigimos para uma compreensão geral do fenômeno, num movimento reflexivo em que nos voltamos para as cenas significativas e as interrogamos, buscando os *invariantes* que as perpassam.

A redução se realiza pela busca de proposições que expressem as convergências reveladas. Trata-se de um "andar em torno" das unidades significativas, focando-as a partir da pergunta diretriz.

Essa etapa de nossa pesquisa não é produto de uma "descoberta" individual, mas um conhecimento construído a partir da experiência vivida nos encontros com os professores-alunos, da vivência da pesquisadora, de suas leituras e do diálogo com outros pesquisadores. Buscamos, assim, o que é característico ao fenômeno que investigamos, compreendendo os sentidos e significados que se abrem no transcorrer da análise.

Nessa direção, após a explicitação das cenas por nós consideradas revelatórias para a compreensão dos significados que se mostraram nos encontros com os professores-alunos de Matemática e Arte, interrogamos os dados novamente, buscando um entendimento mais aprofundado e abrangente. Mais uma vez, procuramos nos colocar na perspectiva dos sujeitos, indagando sobre como cada um deles compreendeu a situação que vivenciou, mobilizando nosso pensar no sentido de esclarecer, de forma reflexiva, o que a cena nos mostrava.

Interrogamo-nos: quais significados emergem das cenas? Analisando cada uma delas, buscamos romper com seus limites individuais e transcender a compreensão pontual a que elas nos levavam, caminhando na direção do sentido da experiência.

[16] A *redução fenomenológica* é um movimento no qual se busca transcender a análise dos individuais, partindo para uma compreensão totalizante, não generalizante, do fenômeno focado. Mais informações podem ser obtidas em Bicudo (1999).

Nesta transição da análise ideográfica para a análise nomotética, realizamos o seguinte movimento: revendo as cenas diversas vezes, realizamos convergências mediante a elaboração de asserções que expressassem o sentido que elas nos revelavam, com o intuito de articular nossa compreensão sobre elas e buscar pelas idéias gerais que as reuniam.

Assim, por exemplo, ao atentarmos para E1-C1, constatamos significados relacionados ao ensino de geometria, à disciplina de desenho geométrico e aos livros didáticos; em E2-C4, emergem significados relacionados ao trabalho conjunto, à colaboração, à prática educacional dos professores e à experiência proporcionada pela vivência com seus alunos. Prosseguimos, dessa forma, indagando pelos significados de cada cena, explicitando, na forma de asserções, o sentido que ela nos revelava.

O *Quadro 6* apresenta as asserções que elaboramos e as cenas a elas correspondentes.

Quadro 6: *Asserções elaboradas pela pesquisadora, a partir da análise das cenas significativas*

Asserções da pesquisadora sobre sua compreensão do manifesto nas cenas	**Número das CENAS**
1. Considerações quanto às dificuldades encontradas para ensinar geometria	1, 12, 18
2. Considerações quanto à extinção das aulas de Desenho Geométrico do currículo da Educação Básica	1, 18
3. Considerações à abordagem dos conteúdos geométricos em livros didáticos de Matemática	1
4. Consideração quanto à importância da geometria para a interpretação de obras de arte	2
5. Compartilhando (o conhecimento de) atividades	3, 34
6. Relacionando o tema estudado no encontro a outros conteúdos e/ou situações	3,7,10,15,17,19,21,24,26,31,33, 34,37
7. Reelaborando enunciados conjuntamente	4,30,39
8. Remetendo-se à prática educativa	4,7,8,10,12,18,20,21,22,24,25,2 6,33,34,35,39
9. Projetando situações para as experiências com seus alunos	4,7,8,10,11,12,17,18,20,21,22,2 5,26, 32,34,35,39
10. Compartilhando as soluções para as atividades	4,5,6,21,23
11. Presença e análise de erros conceituais na realização das atividades	5,9,23,28,32
12. Manipulação do material para apresentar soluções	6,7,8,10,15,23,28,29,30,31,32,3 5
13. Busca de regras matemáticas	6,16,26,39
14. Estranhamento (do conteúdo discutido)	7,16,18,34,36
15. Analise da importância da atividade para a sua disciplina	7,10,17
16. Consideração quando às possibilidades educacionais do material manipulativo	7,10,18,39
17. Considerações quanto ao uso do computador	8

18. Comparação dos professores de Arte aos de Matemática	10,39
19. Considerações sobre os mosaicos trabalhados na disciplina de Arte	10
20. Considerações quanto à possibilidade de utilização das atividades/materiais em sala de aula	10,20,33,39
21. Compartilhando o conhecimento da disciplina	10,34
22. Considerações quanto aos cálculos envolvidos nas atividades	10,18
23. Surpresa com a descoberta	10,26
24. Desapontamento entre o esperado e o encontrado na atividade	10
25. Interesse pelos procedimentos de confecção das peças	11,13,33,37
26. Busca por aplicações da geometria em situações cotidianas	12,17
27. Considerações quanto à importância do ensino de geometria	12
28. Disponibilidade para auxiliar o colega	13,24,36
29. Uso de habilidades artísticas para decorar o material ou para representar soluções	13,24,27
30. Questionando a diferença entre ver e visualizar	14
31. Associação de conteúdos teóricos às atividades com os materiais	16
32. Considerações quando ao trabalho educacional conjunto envolvendo professores de Arte e de Matemática	18,34
33. Considerações quanto às condições necessárias para a realização de atividades diversificadas (como as apresentadas) em sala de aula	18,33
34. Considerações sobre a importância de atividades de capacitação mais práticas que teóricas	18
35. Considerações quanto à importância da integração da equipe escolar para a efetivação de ações educativas	18
36. Comparações entre a Rede Municipal de Ensino e a Estadual	18,33
37. Consideração quanto aos receios/limites dos professores no desenvolvimento de atividades diversificadas	18,33
38. Compartilhando (o conhecimento de) materiais de ensino	19
39. Compartilhando a experiência de utilizar os caleidoscópios em sala de aula, com seus alunos	20
40. Considerações quanto às carências dos alunos	22
41. Destaque do caráter artístico nas atividades/ações realizadas pelas professoras de Arte	24,27
42. Considerações quanto à importância das informações fornecidas nos encontros	10,26,33
43. Considerações quanto à falta de tempo disponível dos professores para preparar as atividades/aulas	18

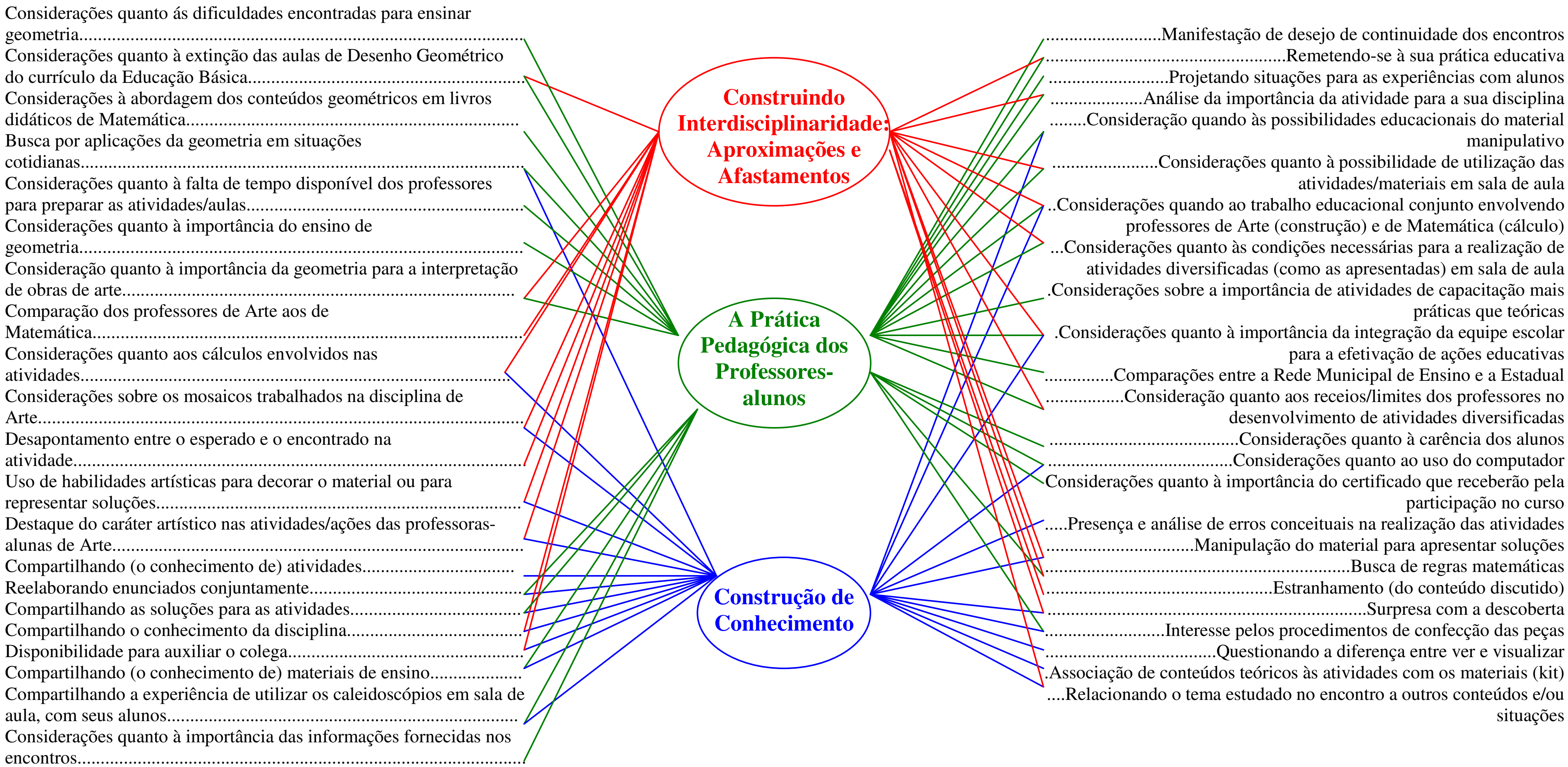
44. Considerações quanto à importância do certificado que receberão pela participação no curso	38
45. Manifestação de desejo de continuidade dos encontros	39

Durante a elaboração das asserções, foi possível constatar que as cenas se sobrepõem e implicam-se mutuamente. Almejando tecer o *fio* que as une, realizamos mais um movimento de redução, buscando aquilo que se mostrava singular à experiência dos encontros. Assim, focamos essas asserções, relacionando-as por meio das idéias a que elas nos conduziam, buscando articulá-las em categorias. Não se trata de "encaixar" determinada asserção em uma categoria, mas sim de uma busca pelos invariantes do fenômeno por meio das confluências as quais as asserções nos dirigiam.

Durante esse processo, procuramos rever e interpretar nossos dados por meio de um trabalho de leitura, reflexão e releitura das asserções, de forma que, quando julgávamos necessário, voltávamos às cenas significativas ou mesmo às filmagens dos encontros, a fim de garantir a compreensão do sentido revelado por elas.

Estando as asserções entrelaçadas entre si e não existindo um limite que as separem, tornando-as independentes, buscamos agrupá-las de forma a explicitar nosso pensar sobre elas, empenhando-nos para que, nas análises seguintes, essas conexões possam se evidenciar.

Na próxima página, apresentamos um esquema que apresenta as asserções e as convergências a que elas nos levaram.



Construindo Interdisciplinaridade: Aproximações e Afastamentos
A Prática Pedagógica dos Professores-alunos
Construção de Conhecimento
Considerações quanto ás dificuldades encontradas para ensinar geometria
Considerações quanto à extinção das aulas de Desenho Geométrico do currículo da Educação Básica
Considerações à abordagem dos conteúdos geométricos em livros didáticos de Matemática
Busca por aplicações da geometria em situações cotidianas
Considerações quanto à falta de tempo disponível dos professores para preparar as atividades/aulas
Considerações quanto à importância do ensino de geometria
Consideração quanto à importância da geometria para a interpretação de obras de arte
Comparação dos professores de Arte aos de Matemática
Considerações quanto aos cálculos envolvidos nas atividades
Considerações sobre os mosaicos trabalhados na disciplina de Arte
Desapontamento entre o esperado e o encontrado na atividade
Uso de habilidades artísticas para decorar o material ou para representar soluções
Destaque do caráter artístico nas atividades/ações das professoras-alunas de Arte
Compartilhando (o conhecimento de) atividades
Reelaborando enunciados conjuntamente
Compartilhando as soluções para as atividades
Compartilhando o conhecimento da disciplina
Disponibilidade para auxiliar o colega
Compartilhando (o conhecimento de) materiais de ensino
Compartilhando a experiência de utilizar os caleidoscópios em sala de aula, com seus alunos
Considerações quanto à importância das informações fornecidas nos encontros
Manifestação de desejo de continuidade dos encontros
Remetendo-se à sua prática educativa
Projetando situações para as experiências com alunos
Análise da importância da atividade para a sua disciplina
Consideração quando às possibilidades educacionais do material manipulativo
Considerações quanto à possibilidade de utilização das atividades/materiais em sala de aula
Considerações quando ao trabalho educacional conjunto envolvendo professores de Arte (construção) e de Matemática (cálculo)
Considerações quanto às condições necessárias para a realização de atividades diversificadas (como as apresentadas) em sala de aula
Considerações sobre a importância de atividades de capacitação mais práticas que teóricas
Considerações quanto à importância da integração da equipe escolar para a efetivação de ações educativas
Comparações entre a Rede Municipal de Ensino e a Estadual
Consideração quanto aos receios/limites dos professores no desenvolvimento de atividades diversificadas
Considerações quanto à carência dos alunos
Considerações quanto ao uso do computador
Considerações quanto à importância do certificado que receberão pela participação no curso
Presença e análise de erros conceituais na realização das atividades
Manipulação do material para apresentar soluções
Busca de regras matemáticas
Estranhamento (do conteúdo discutido)
Surpresa com a descoberta
Interesse pelos procedimentos de confecção das peças
Questionando a diferença entre ver e visualizar
Associação de conteúdos teóricos às atividades com os materiais (kit)
Relacionando o tema estudado no encontro a outros conteúdos e/ou situações

O fato de muitas asserções convergirem para mais de uma idéia revela que a compreensão do fenômeno focado se dá por meio da análise da totalidade das categorias obtidas, não sendo possível a escolha de uma como sendo a mais relevante. As asserções estão interconectadas, bem como as cenas e os encontros, de forma que a compreensão dos significados se enreda nas articulações e sentidos intrínsecos à rede tecida ao longo da pesquisa.

Assim, interrogando pelas idéias presentes nas 39 cenas significativas, encontramos 45 asserções que nos conduziram a 3 invariantes, os quais, compreendemos, irão possibilitar a análise e interpretação dos significados que se mostram na vivência dos encontros com os professores-alunos de Matemática e Arte. São eles:

- Construindo interdisciplinaridade: aproximações e afastamentos;
- A prática docente dos professores-alunos; e
- Construção de conhecimento.

Não buscando estabelecer uma hierarquia entre eles, serão analisados, a seguir, na ordem em que foram se mostrando à pesquisadora, numa perspectiva que almejou o processo de teorização[17] do investigado.

[17] Teorização está sendo entendido como ação de teorizar, ou seja, de sistematizar um conjunto de compreensões expostas em linguagem, que revela um discurso sobre aquilo do que se fala, reunindo, mediante um trabalho articulador, pautado em análises críticas, interpretativas e reflexivas, as convergências compreendidas, direcionando o pensar do investigador para aspectos mais gerais do investigado.

5.2 Interpretando as Categorias Abertas

5.2.1 Construindo Interdisciplinaridade: Aproximações e Afastamentos

Cada professor-aluno presentificou-se nos encontros com seu modo de ser e proceder, fruto de suas vivências. Ao manifestar-se, ora destacava-se em sua singularidade ora se enredava aos outros. É o professor especialista, de Matemática ou de Arte, mas, também, é o coletivo de uma distinta disciplina ou do grupo todo de professores-alunos envolvidos na cena. Na atitude de abertura ao outro, os sentidos emergem, evidenciando a complexidade dos encontros.

Peculiaridades da experiência vivida apontam para os significados que se evidenciaram nas trocas, estranhamentos, expectativas, consensos e discordâncias ocorridos, e que estão relacionados à característica multidisciplinar dos encontros e aos direcionamentos que se deram, no estudo das pavimentações do plano e na utilização de materiais manipuláveis.

Aspectos matemáticos e artísticos da geometria das pavimentações emergiram na experiência vivida no contexto dos encontros, expondo distintas formas de conceber e abordar as atividades propostas.

Em E2-C6, E4-C16, E4-C18, E6-C26, E7-C39, houve busca por regras, leis e fórmulas, que "garantissem" os conceitos tratados. A necessidade de justificativas mais formais apontou para um forte domínio da geometria axiomática e *demonstrativa*, sobre a ação dos professores-alunos de Matemática.

"há uma regra pra descobrir quando um arranjo pavimenta ou não o plano?" (M7, C16)
"existe uma regra para encontrar a quantidade de cada tipo de poliminó?" (M7, C26)
"como faz pra achar o número áureo na pavimentação", "tem como provar?" (M5, C39)

Essa forma de abordar as atividades evidenciou-se, ainda, nos modos como os professores-alunos de Matemática analisam as possibilidades de aplicação em sala de aula, relacionando com as possibilidades de seus alunos.

"hoje na oitava série.. Eu acho que se iniciar com eles já na quinta vai criando." (M6, C18)
"Os conceitos geométricos... às vezes constrói e não sabe fazer a leitura. Aí vê uma fórmula: 'ai, que que é isso!'" (M9, C18)

Houve, também, destaque para a arte e para o ato criador nas representações das soluções, como se pode ver em E1-C2, E5-C24, E5-C25, E4-C13, E5-C23, E5-C24 e E6-C27. O apelo ao novo se evidenciou nas formas criadas (E6-C27), na confecção dos materiais e caleidoscópios (E4-C13), no momento de colorirem as bases (E5-C23, E5-C24), contagiando o ambiente dos encontros e envolvendo todos os presentes.

"ficaria horas pintando" (A8, C24)
"daria algumas dicas, mas deixaria que o aluno criasse. Surgem muitos trabalhos maravilhosos, independente, muitas vezes, da intervenção do professor" (A10, C25)
"a geometria é importante pra interpretar as obras de arte" (A3, C2)
"não é pra reforçar as linhas da base, né, senão os triângulos ficam divididos" (A9, C23)

Em meio às distintas formas de tratamento das atividades propostas, a abertura e a disposição dos professores-alunos resultaram em discussões e análises coletivas, possibilitando que cada um trouxesse colaborações ao partilhar sua compreensão e ouvir a dos colegas, ao agir e se interessar pelos resultados expostos pelo companheiro. A emergência de distintas formas de conceber e abordar o conteúdo tratado e os conceitos envolvidos resultou em momentos de atenção com o *outro*, de forma que os significados foram sendo negociados por meio de diálogos abertos, envolvendo sujeitos situados em um mesmo espaço intencional.

Os professores-alunos revelaram disposição para apresentar, aos demais, as soluções que encontravam, suas compreensões e justificativas e para expor as formas como abordaram o assunto (E5-C24; E2-C6). Cada professor-aluno, ao elaborar suas conjecturas, analisar suas conclusões e apreciar o trabalho e as conjecturas de seus colegas, revelou modos de perceber e sentir entrelaçados à sua formação acadêmica. A vivência da prática docente de sua disciplina é chamada a doar sentidos à experiência dos encontros.

Mostrou-se, nas interações entre os professores-alunos, o interesse em conhecer e envolver-se com temas e assuntos próprios à outra área de conhecimento. Essa postura exige confiança no colega, compromisso com o coletivo e flexibilidade para ver um horizonte de possibilidades.

Ao compartilharem a prática pedagógica específica de sua disciplina, os professores-alunos podem se "apropriar" das formas de conceber do *outro*, numa ação conjunta e interdisciplinar que possibilita a reorganização do *olhar* para os elementos envolvidos.

Estar com o outro e compartilhar formas de ação levou os professores-alunos a analisarem possibilidades de agir na prática escolar, de forma integrada com os colegas. Houve consenso quanto à necessidade de criação de ações educativas interdisciplinares e quanto à sua importância para a formação do aluno. Porém, ao discutirem sobre um trabalho escolar que envolva as distintas disciplinas, a ênfase recaiu, principalmente, sobre o caráter multi – e não inter – disciplinar de um projeto coletivo.

"é um trabalho que o professor pode fazer um trabalho de integração. Elas o desenho [aponta para as professoras de arte] e a gente a geometria. Deve haver essa integração" (M7, C18)

"dá na quinta, na sexta. Na oitava: cálculo. Quando tinha desenho geométrico elas [aponta para as professoras de Arte] ensinavam e a gente o cálculo. A gente não tem mais. A gente trabalhava construção em desenho e cálculo em Matemática. Agora não" (M9, C18)

"Eu tô fazendo um trabalho sobre 'beleza grega' com os alunos da oitava série e eu queria fazer um fechamento do trabalho com os alunos. A fita vai dar certinho" (M1, 34)

Os professores-alunos apontaram fatores importantes na realização de trabalhos coletivos, como a necessidade de um projeto de ação e o envolvimento de todos, caso contrário, ações solitárias podem se perder no esquecimento. Evidenciaram que a atitude interdisciplinar exige diálogo, trocas e tentativas de realizar ações diversificadas (E4-C18). A inovação, por sua vez, exige revisão do caminho percorrido e reorganização do caminho a percorrer.

Foi possível inferirmos que as discussões ocorridas nos encontros não transcendem a mera análise das ações e conseqüências envolvidas em práticas interdisciplinares. Ou seja, na dimensão dos encontros, as discussões não avançaram em direção ao *pro-jeto* que "lança à frente", atualizando-se em ações e programações (BICUDO, 1999, p.11). Contudo, o pro-jeto pode vir a se constituir em ações efetivas, pois ele abarca o futuro e o passado: ao lançar a frente, também desloca nosso olhar para o passado, para a obra realizada e concretiza-se por meio de decisões e ações, nas quais abrem-se novas portas e fecham-se outras (BICUDO, 1999).

Consideramos que a experiência dos encontros, na qual os professores-alunos refletem sobre os aspectos relacionados às ações interdisciplinares inteirando-se e envolvendo-se com os colegas de outras disciplinas, poderá tornar-se um passado-presente em suas vivências futuras. As interações ocorridas podem vir a se constituir na superação das dificuldades e acomodações em direção ao *transfazer*. Martins (1992) explica que esse *transfazer* é um *ir além de*, pois enquanto indivíduos que sentem o mundo, atribuindo significados às experiências, vivemos um recriar sempre inacabado, pois o ser humano é sempre um *ser de possibilidades*. Acreditamos que a abertura dos professores-alunos para envolver-se com professores de áreas distintas revelou *sujeitos interdisciplinares* buscando formas de *ser no mundo com o outro*. Essa postura pode abrir caminhos para uma prática diversificada.

Outros significados emergiram em meio a um estranhamento motivado pelo excesso de ênfase no conhecimento matemático (E3-C10). As professoras-alunas de Arte expressaram seu desapontamento entre o esperado e o encontrado nas atividades (E3-C10).

"esse negócio de número é pra professor de matemática" (A3, C10)
"A dificuldade de Arte no assunto é o seguinte: por exemplo, na pavimentação os ângulos têm que se encaixar certinho, matematicamente, e a gente fica fazendo essas contas. Em arte, a gente em arte trabalha o que? Mosaico. E com o mosaico não precisa encostar. Não precisa contar o ângulo. A gente poderia colocar essa figura assim [aponta para um arranjo do texto e gesticula como se puxasse um polígono para deixar um espaço entre eles] e depois preencher de massa. Aí não precisa ter o mesmo ângulo." (A8, C10)
"eles [aponta para os professores de Matemática] raciocinam muito rápido e a gente não consegue acompanhar" (A8, C10)
"Não é que é o problema. Não é interessante. Nós não vamos usar, não é interessante pra gente" (A3, C10)

Evidenciou-se nosso despreparo para abordar a lógica da outra disciplina e para ver que a "dominância" de uma das áreas, nesse caso a Matemática, ao tornar-se imperiosa, não permitiu avançarmos nas trocas e interações, resultando no desapontamento das professoras-alunas de Arte. Contudo, os diálogos evidenciaram a busca, de ambas as partes – especialistas de Matemática ou Arte –, pela compreensão das perspectivas de olhar do outro.

Pudemos constatar que um trabalho que visa ultrapassar os limites impostos pelas disciplinas exige uma

> postura de reconhecimento onde não há espaço e tempos culturais privilegiados que permitam julgar e hierarquizar – como mais corretos ou mais verdadeiros – complexos de explicação e convivência com a realidade que nos cerca (D'AMBROSIO, 1997)

O envolvimento, o respeito, a disposição para procurar entender as *formas de olhar* do *outro*, buscando perfis, às vezes inimaginados, para abordar o assunto discutido, de certa forma, resulta da crença de que o outro, também, está disposto a dizer, ouvir e estabelecer-se numa relação empática com os demais.

5.2.2 A Prática Pedagógica dos Professores-alunos

À vivência dos encontros integram-se as experiências da prática docente dos professores-alunos. Essa associação revelou-se em diversas situações: ao envolverem virtualmente seus alunos nas discussões das atividades, ao transporem para os encontros suas experiências de sala de aula – e vice-versa –, ao exporem suas expectativas com relação aos materiais utilizados, enfim, ao revelarem sua imersão numa cultura escolar.

Nesse sentido, da vivência dos encontros emergiram significados entrelaçados às movimentações em torno da prática docente.

O perfil[18] dos professores-alunos, traçado a partir do questionário inicial, denuncia suas expectativas e anseios com relação ao curso e às ações em sala de aula:

"adquirir novas experiências e conhecimento mais amplo para ensinar geometria".
"fundamentar alguns conceitos".
"atualizar" e "aprender e conhecer software de geometria para melhorar suas aulas".
"aprimorar" conhecimentos e "acrescentar novas idéias".
"aprender um pouco mais do conteúdo aplicado". Viu no curso "uma grande oportunidade para os professores da área trocarem informações e conhecimentos".
"trabalhar atividades que tragam maior conhecimento sobre o assunto e poder usá-las em sala de aula".
"ampliar seu conhecimento" sobre a geometria.
"mais noção e habilidades para trabalhar com a geometria".
"aprender a utilizar materiais alternativos".
"aprender a trabalhar com material concreto".
"trabalhar uma geometria atraente para os alunos".
"conhecer outras formas de ensinar geometria".

Essas frases revelam a intencionalidade dos professores-alunos dirigida para o interesse de atualização de suas compreensões sobre o tema dos encontros. O assunto abordado mostrou-se um pólo de convergências das intencionalidades dos sujeitos da pesquisa, impulsionando o processo de abertura aos encontros e ao outro, para a realização de análises coletivas sobre a geometria, as atividades, as possibilidades de ações e as dificuldades que se colocam na prática.

Em E4-C18, foi possível constatar que os professores-alunos estavam a par dos problemas relacionados ao ensino de geometria (os mesmos problemas apontados por pesquisadores como PEREZ 1991, PAVANELLO 1993, LORENZATO 1995, FAINGUELERNT, 1999, GAZIRE, 2000). Talvez a prática em sala de aula os tenha colocado diante de tais questões. Eles revelaram receios em abordar a geometria e fazem considerações ao seu ensino:

"E aquele negócio de professor que não gosta de geometria, deixa pro fim do ano e nunca dá nada" (M9, C10)
"eu não me sinto preparada pra ensinar geometria" (M6, C1)
"era dada pelo professor de educação artística. Era melhor" (M4, C1)

---

[18] Ver página 67

"acho que a geometria abre a cabeça, mas não consigo achar a sua importância para o dia a dia, para a vida, uma aplicação prática pro aluno" (M6, C12)

Houve considerações quanto à importância da geometria para o desenvolvimento cognitivo do aluno, mas o caráter utilitário de outros conteúdos matemáticos, como a aritmética, choca-se frente à não identificação de aplicabilidade das idéias geométricas em situações cotidianas, preocupando a professora-aluna de Matemática (E3-C12):

"é diferente da importância de saber uma conta para fazer uma compra" (M6, E3-C12)

A busca por tais aplicações, no intuito de identificar situações cotidianas significativas para os alunos, leva à associações do tema e materiais utilizados nos encontros às atividades comerciais (E4-C17).

"Então vou perguntar: o profissional que usa isso, por exemplo, que pode usar isso no seu trabalho. O profissional mesmo, não o professor." (M6, C17)
"porque eu imaginava trabalhar com isso pra mostrar pro cliente, fala 'ó', mostra pro cliente, 'vai ficar isso, ó'. Ou mesmo pra quem tá projetando o piso" (M6, C17)

E, a beleza do visual das pavimentações pareceu representar uma forma de chamar a atenção dos alunos e criar situações "atraentes" (E-C20):

"usei como motivador para outros estudos em geometria" (M7, C20)

O cuidado e a disposição para *ser-com* o aluno e com os conteúdos trabalhados (MARTINS, 1992) revelam a importância do *outro* – mesmo ausente – na busca de ações na prática educativa. Dessa forma, passado e futuro se interpenetram na experiência dos encontros, revelando os modos de os professores-alunos estarem no tempo – aqui (nos encontros) e ali (na sala de aula).

"faz eles [os alunos de A8] usarem régua e compasso para traçar a bissetriz ou só marca o ponto médio mesmo?" (A8, C21)
"eles correm e abraçam a gente" (M6, C22)
"muitas vezes através de um elogio" (A10, C25)

Ao retomarem e reorganizarem suas experiências educativas, parecem vislumbrar um horizonte que impele o avançar

> na maneira existencial de sermos, na plenitude da riqueza da força que nos impulsiona para sermos e para nos manter sendo, ainda que no fluxo contínuo do devenir, onde a cada instante somos, permanecemos – duramos – sendo e modificando-nos e abrindo-nos às possibilidades de existirmos de tal e tal modo. (BICUDO, 2003, p.36)

As cenas E5-C21, E5-C25 e E6-C33, E-C revelaram o *cuidado* (MARTINS, 1992) de professores que buscavam abrir possibilidades de modos de ser em sua prática e com seus alunos. Nas cenas, os professores refletem sobre a importância que os assuntos, atividades e materiais utilizados nos encontros poderiam ter para a sua disciplina. Discutem a aprendizagem dos alunos e analisam ações:

"a reta numérica quando vai trabalhar número inteiro" (M6, C15)

"se já é difícil pra gente que tem uma formação, imagina pros alunos"(M6, C32)

"eu achei importante, como professora de arte, porque eu tirei do bidimensional, que é muito difícil do aluno visualizar, e trouxe pro tridimensional, usando objetos. E ficou muito mais fácil de explicar. Na manipulação de objeto ele vai entender melhor o conceito. Fica muito mais fácil, ele vai entender muito melhor o conceito" (A3, C7)

"porque é importante a gente saber disso aí?" (M6, C10)

"Achei a atividade do caleidoscópio legal. Tudo no visual vai dar pra gente usar. Mas quando chegou esse negócio de contas... Pavimentação do plano é parte matemática" (A3, C10)

"a [M9] falou uma coisa que eu acho que é fundamental. É trabalhar numa equipe, de preferência que a gente tenha uma equipe que é aquela equipe da escola. Que na hora do planejamento: 'nós vamos dar geometria?' é importante que todos que estão envolvidos na área falem: 'vamos dar geometria'. Se vai pegar as quintas, então vamos dar no mínimo isso... Senão a gente perde a seqüência. É importante que caminhe junto. Mudou de professor, não tem problema. Mas eu falo pelo menos o básico na quinta, na sexta... Independente do professor, ele deu aquela base" (M6, C19)

"é importante saber que existem pesquisas sendo desenvolvidas nessa área, porque às vezes a gente acha que já está tudo pronto" (M5, C26)

"depende do que você tá trabalhando, né, da série..." (A8, C21)

"é muito variável de turma para turma. Tem quinta série que é possível e oitava que não..." (M6, C33)

De E4-C18 emergiram, também, significados relacionados a um trabalho coletivo. A disposição necessária para que um trabalho em equipe se efetive denuncia sua natureza social e a importância de uma postura de compromisso dos envolvidos – professores, coordenadores e direção.

"É trabalhar numa equipe, de preferência que a gente tenha uma equipe que é aquela equipe da escola. Que na hora do planejamento: 'nós vamos dar geometria?' é importante que todos que estão envolvidos na área falem: 'vamos dar geometria' " (M6, C18)

"mas este trabalho tem que ter uma seqüência. A equipe tem que ter uma consciência que quando você começa..." (M9, C18)

"Que na hora do planejamento: 'nós vamos dar geometria?' é importante que todos que estão envolvidos na área falem: 'vamos dar geometria'. Se vai pegar as quintas, então vamos dar no mínimo isso... Senão a gente perde a seqüência" (M6, C18)

Um projeto coletivo pressupõe a existência de projetos pessoais, de histórias de vida, e traz consigo o sentimento de pertença no mundo que nos coloca junto aos demais, pois, estando situado e envolvido,

> eu nunca estou fechado num mundo como um objeto numa caixa. Minha liberdade, o poder fundamental de que gozo, por ser o sujeito de todas as minhas experiências, não diverge de minha inserção no mundo. (MARTINS, 1992)

Pudemos ver, também, que a prática docente dos professores-alunos revelou basear-se num conhecimento acadêmico específico da disciplina (discutidos na categoria anterior) e num conhecimento tácito e intuitivo, propiciado pelas vivências no ambiente escolar, como sugerem as cenas apresentadas.

Com relação às atividades desenvolvidas nos encontros, os professores-alunos mostraram que consideram importante realizar trabalhos diversificados com os alunos, mas apontaram obstáculos que se colocam frente às ações desse tipo, como a falta de recursos, pouco tempo disponível e os receios pessoais:

"que nem na nossa escola do município, que eles colocam menos alunos, você tem mais condição. No estado não, mas no município eu acredito que funcione. Por causa do espaço, ensino, professor integrador..." (M9, C18)
"mas não é. Nós também temos medo de fazer coisa diferente" (M6, C18)
"Você tem livros, teoria, você entendeu, mas prática é muito pouco" (M9, C18)
"o número de aluno na sala, o material que você consegue. Eles dão condição. No Estado é mais difícil" (M9, C18)
"outra coisa importante é o tipo das carteiras" (M4, C18)
"É o professor que vai, é ele que constrói" (M4, C18)
"por isso que eu acho importante a sala ambiente pra você trabalhar isso" (M9, C18)
"tudo isso é muito interessante, mas quando a gente vai fazer isso? No fim de semana?" (M4, C33)
"seria interessante se houvesse dois professores na sala" (M4, C33)
"pede ajuda pro professor integrador" (A11, C33)

Notamos que as concepções sobre ensino, aprendizagem, conteúdo lecionado, escola, etc., influenciam as ações dos professores-alunos durante os encontros, abrindo caminhos para o debate e, talvez, para buscarem, futuramente, modificações efetivas em suas práticas. Mas, a prática educativa está condicionada a diversos fatores, como: propósito da escola; objetivos do ensino de determinada disciplina; controle da sala de aula; avaliação; etc. A forte relação entre as concepções e a prática, pode tornar-se inconsistente quando o discurso manifestado não está em sintonia com as ações, evidenciando conflitos e angústias.

Perez (2004) aponta que a resolução dos conflitos poderá processar-se por duas formas fundamentais: por acomodação ou por reflexão. No primeiro caso, procura-se simplesmente a solução mais "econômica" e menos trabalhosa. No segundo caso, busca-se ver o conflito por diversos ângulos, faz-se intervir elementos teóricos, e pesa-se os prós e os contras de diversas soluções possíveis.

Contudo, mudanças profundas no sistema de concepções e renovação das ações não são simples, e só se verificam perante abalos muito fortes, geradores de grandes desequilíbrios no quadro de vivências pessoais intensas (HIRATSUKA, 2003). Considerando que as mudanças envolvem aspectos internos e externos aos professores, pudemos compreender que a *formação* não se limita à participação em cursos e capacitações. Ela carrega significados complexos:

> *formação* designa o processo de devir, em que o contorno da imagem, que persegue o modelo, se realiza. Mas é mais que isso. Esse processo, porém, não se efetua de modo a atender a uma finalidade técnica à ela externa, mas brota do processo interno de constituição e de formação, permanecendo em constante evolução e aperfeiçoamentos. (BICUDO, 2003, p. 28)

Ou seja, a formação diz da *forma* e da *ação. Forma*, no sentido da imagem do papel social do professor. *Ação*, que ao agir, realizar, colocar-se em movimento pela propulsão da intencionalidade da pessoa, da condição existencial de ela estar voltada para sua prática em sala de aula, a caminho de ações diversificadas em sua atividade docente.

É certo que, sem o mundo contextual, as ações não se materializam. Portanto, no ensino de geometria é preciso considerar o contexto da realidade escolar do professor. Mas, é certo, também, que, sem uma forma prévia do papel desempenhado, as ações se perdem à procura de delineamentos. A *forma/ação* é o movimento de fazer. Na *ação* a *forma* vai se constituindo. Contudo, é uma *forma* que carrega consigo a tradição das práticas histórico socialmente efetuadas e a marca do momento, deixada pelas ações pessoais que, ao mesmo tempo, trazem consigo todas aquelas pessoas que "com-vivem" existencialmente naquele momento.

5.2.3 Construção de Conhecimento

Julgamos imprescindível explicitar, nesse momento, que compreendemos construção do conhecimento e construção da realidade como

> um mesmo movimento no qual o mundo faz sentido para a pessoa, onde sempre se está com o outro, onde se dá a atribuição de significados e onde se participa da construção da realidade mundana. (BICUDO, 2000, p.29)

Essa construção se dá na relação dinâmica e indissociável entre os objetos dados à percepção e o sujeito da experiência, com seus modos de perceber e comunicar o percebido (BICUDO, 2000, p 40).

Dessa forma, essa categoria não trata de manifestações que revelaram a assimilação de conceitos e informações. Na vivência dos encontros, os professores-alunos instalam-se em um processo de formulação das idéias, de análises coletivas e de negociações, dirigindo-se às atividades, aos materiais utilizados e aos colegas, compartilhando vivências e atribuindo sentidos. Nossa atenção se volta para os significados que emergiram desse movimento de realizações conjuntas.

As razões explicitadas pelos professores-alunos sobre o porquê encaminharam-se aos encontros e as manifestações de interesse pelo assunto tratado revelaram um estado de busca que alavanca o movimento de construção do conhecimento. Eles mostram sua intencionalidade voltada para a realização do curso.

Essa *intencionalidade* os mantém atentos às falas e manifestações que se dão no decorrer das atividades, possibilitando: o compartilhamento dos materiais que utilizaram em sala de aula e dos conhecimentos próprios de sua disciplina (E2-C6, E4-C19, E5-C23, E6-C26); a exposição de suas experiências em sala de aula (E5-C20) e de formas de ensinar os assuntos tratados (E5-C21); a discussão de enunciados e de suas compreensões (E2-C5); o auxílio ao colega em suas dificuldades (E4-C13, E7-C36). Nessas experiências, cada professor-aluno percebe a si próprio e aos outros, expondo suas vivências e interando-se das dos companheiros.

Algumas cenas revelaram incompreensões, durante o desenvolvimento das atividades, relacionadas às idéias e conceitos envolvidos, como na determinação dos tipos de tetraminós (E6-C28), na determinação das imagens geradas (E2-C5), na coloração da base (E5-C23) e na construção de uma faixa cheia (E6-C32). Essas incompreensões parecem estar relacionadas, sobretudo, no pouco contato (anteriormente ao curso) dos professores-alunos com os tipos de atividades propostas e materiais utilizados. Porém, o papel dos próprios materiais mostrou-se importante para que, solidariamente, os professores-alunos investigassem as situações e re-elaborassem suas interpretações e conclusões. Com a manipulação dos materiais e por meio do diálogo com os colegas, detectaram equívocos e refletiram sobre os aspectos envolvidos na atividade.

Os professores-alunos, também, utilizaram os materiais para demonstrar regras matemáticas, verificar intuições e apresentar aos colegas justificativas para as soluções encontradas (E6-C29, E6-C28, E4-C16).

“posso dizer que forma uma pavimentação se usar as peças dos dois lados?” (M7, C9)
“pra mim é a mesma peça...” (M7, C29)
“mas tem mais de sete” (M6, C28)
“mas eu sei que no fim vai ficar um buraco” (M2, C32)
“Foi o que a gente fez aquele dia, né, com o kit” (M9, C16)
“Vamos supor que eu fosse pavimentar essa sala...” (M6, C16)
“Quando ele colocou aquele círculo na lousa eu falei: ‘gente! que que é isso?’ Nada! Provando com a prática com o espelho, a gente consegue entender a simplicidade daquilo” (A8, C7)

A visualização revelou-se importante no desenvolvimento das atividades. Mostrou-se como um apoio intuitivo auxiliar ao raciocínio, enriquecendo a representação e análise das conjecturas imaginadas pelos professores-alunos (E1-C2; E2-C5; E2-C6; E2-C7):

“Nós continuamos vendo cinco imagens em três pontos simétricos, porque ficou dois juntinho aqui, dois juntinho ali... formando um triângulo. Como o feijão era grande, ficou duas imagens, se fosse menor seria três pontos” (A8, C5)
“ver e visualizar são diferentes? Ver é o real, né. Então você visualiza nos espelhos?” (M7, C14)
“agora que eu tô de frente, eu tô vendo” (A8, C7)
“manipulação de objeto fixa mais, é mais fácil de entender. Manipulando e vendo lá na lousa, lá você não entende nada, dá pra passar o conceito mais fácil” (A3, C7)

Nos diálogos, as falas projetavam compreensões e interpretações, que eram complementadas por outras falas, confirmando, explicando, solicitando auxílio:

“seriam quatro...” (M6, C26)
“sabia que eram muitos, mas não imaginava que eram tantos” (M2, C26)
“é importante saber que existem pesquisas sendo desenvolvidas nessa área, porque às vezes a gente acha que já está tudo pronto” (M5, C26)
“é só acostumar” (M5, C36)
“então não é. Mas tem que mudar aqui” (M7, C30)

Em E2-C3, E2-C4, E4-C15, observamos os professores-alunos fazendo associações dos temas tratados com outras situações, relacionando significados:

“a reta numérica quando vai trabalhar número inteiro” (M6, C15)
“pode ser ângulo também, se pensar nos lados” (M6, C4)
“complete a seqüência... tem simetria” (M7, C2)

Nas cenas citadas, pudemos notar que as experiências vividas nos encontros não são dadas aos professores-alunos como modelos de prática pedagógicas, a serem seguidos por poderem responder “verdades”. Eles as *habitam* com suas maneiras de ser, sentir, raciocinar e pensar sobre. O que surge como novo complementa aquilo com que já estavam familiarizados. Contudo, o novo não se adiciona, simplesmente, à experiência. As tensões ocorridas geram movimentos de idas e vindas, decompondo e recompondo sentidos, formando uma totalidade que está em correspondência com aquilo e com aqueles que estão ao seu redor.

Evidenciou-se, nas falas dos professores-alunos, que eles consideram importante o uso dos materiais na análise e discussão dos conceitos envolvidos nas atividades, relacionando-as às ações em suas salas de aula. Dessa forma, ao remeterem-se aos seus alunos e avaliarem modos de agir junto a eles, os professores-alunos, também, compartilham conhecimentos construídos em suas práticas educativas, não as perdendo de vista, porém abrindo-se às experiências dos encontros. Isto é, mostram-se receptivos a avaliá-las, confirmá-las, reformulá-las.

"ficou muito mais fácil de explicar. Na manipulação de objeto ele vai entender melhor o conceito. Fica muito mais fácil, ele vai entender muito melhor o conceito" (A3, C7)
"manipulação de objeto fixa mais, é mais fácil de entender. Manipulando e vendo lá na lousa, lá você não entende nada, dá pra passar o conceito mais fácil" (A3, C7)
"é, pega aqueles alunos melhores"(M4, C33)
"mas, os mais bagunceiros é que são bons nisso" (M5, C33)
"Não é interessante. Nós não vamos usar, não é interessante pra gente" (A8, C10)

Nas interações ocorridas, evidenciou-se a importância das trocas entre as disciplinas, das interações entre modos de conceber determinados assuntos e da disposição para abrir-se à compreensão do modo de olhar do outro, para impulsionar a construção de conhecimento:

"na pavimentação os ângulos têm que se encaixar certinho, matematicamente, e a gente fica fazendo essas contas. Em arte, a gente em arte trabalha o que? Mosaico. E com o mosaico não precisa encostar. Não precisa contar o ângulo... " (A8, C10)
"tem a ver com as construções. Antigamente não tinha argamassa, eles colocavam a pedra e encaixavam" (A8, C10)
"porque primária? E o marrom, o preto, o bege..." (C24)
"...eu nunca pensei que pudesse encaixar, 360º ..." (A8, C10)

Nos encontros, em meio às especificidades das disciplinas envolvidas, pudemos ver que a construção de conhecimento se dá reavivando, tematizando, compreendendo sentidos e enredando-os aos já experienciados, nos horizontes individuais dos professores-alunos. Considerando, como dissemos, que essa construção se dá no mesmo movimento de construção da realidade, então o conhecimento diz respeito a um todo integrado e inter-relacionado que rompe com ordenações compartimentadas, e esse aspecto destaca as potencialidades do projeto interdisciplinar em uma construção voltada para a promoção humana, que valorize a afetividade, a compreensão e a abertura ao outro (ESPÓSITO, 2006).

Notamos, na vivência nos encontros, a elaboração de idéias, sensações, hipóteses e justificativas se estruturarem e se transformarem nas interações entre os presentes, revelando modos de perceber, de sentir, de articular significados e de expor valores, desvelando subjetividades. Mesmo em sua singularidade, a maneira de ser de cada um se situa entre a dos *outros* que estão ao seu redor, participando da construção da subjetividade do eu. Com *o outro*, concretiza-se o movimento simultâneo de subjetividade e intersubjetividade em direção a uma objetividade, movimento ilustrado por Martins (1992) da seguinte forma:

> Duas pessoas A e B, ao observarem uma paisagem do mundo, participam de valores presentes nesse mesmo mundo onde as duas perspectivas convergem. A consciência de A e a consciência de B estão assim em comunicação. A percepção do mundo por A não significa, porém, que ele esteja observando a mesma coisa que B quando percebe o mundo. Ambos estão chegando a uma forma pré-pessoal de consciência, onde a comunicação não apresenta problemas, uma vez que a definição de consciência refere-se ao significado ou à realidade de A e de B. É a intersubjetividade entre A e B que permitirá uma participação de verdades entre A e B, ou seja, a verdade será construída a partir da intersubjetividade de A e de B.

Pudemos compreender que, no caso específico deste trabalho, as pavimentações do plano, os materiais manipuláveis utilizados e as possibilidades de ensino, estão aí, diante de nós, para doarem-se à consciência, isto é, ao olhar atento, que se mantém pela intencionalidade de cada um, ao mesmo tempo em que a revela. Contudo, essa doação só se concretiza na abertura, ou seja, na disponibilidade de a pessoa: perceber sentidos e adentrar significados; desconstruir conceitos para voltar a constituí-los, em novas dimensões compreensivas; expressar suas compreensões a si e aos outros e ouvir as dos seus companheiros. Nesse movimento, cada um de nós vai abrindo possibilidades, pois “o homem não é por natureza aquilo que está destinado a ser e, como ser de possibilidades, necessita construir-se na sua humanidade, o que se realiza através do ato de educar propriamente dito” (MARTINS, 1992).

CAPÍTULO 6: A CAMINHO DE UMA SÍNTESE SEMPRE ABERTA

Buscar responder à questão diretriz *"Quais significados os professores de Matemática e de Arte atribuem ao trabalho com pavimentações do plano, envolvendo material manipulativo, em situação de ensino e aprendizagem de geometria?"* leva-nos à elaboração de uma síntese que reúne as idéias construídas e articuladas no caminhar da pesquisa, junto à experiência vivida, aos autores mencionados ao longo desse trabalho, às nossas próprias vivências, às análises reflexivas e reduções realizadas. Trata-se de uma síntese que não encerra "verdades conclusivas", mas que abre-se à dialética das argumentações e das reflexões realizadas.

Em meio aos materiais utilizados e às pavimentações abordadas nas atividades desenvolvidas nos encontros com os professores-alunos, as interações avançam não somente no sentido de investigar as idéias e os conceitos geométricos envolvidos, mas adentram, também, por questões intrínsecas a um trabalho diversificado como o proposto: as possibilidades e os obstáculos que se colocam à prática docente, a abertura ao outro e os estranhamentos surgidos, as desconstruções e reconstruções de conceitos.

As interações ocorridas evidenciam que a utilização de recursos e a contextualização por meio de diferentes atividades e situações-problemas podem possibilitar um processo de ensino e de aprendizagem em que um conceito não se reduza, simplesmente, à sua definição, mas que seja o produto de interações e construções conjuntas entre os envolvidos. Contudo, o uso de materiais manipuláveis – como os apresentados aos professores-alunos durante os encontros – em atividades de ensino pode ter seu papel comprometido quando suas possibilidades de enriquecer as discussões e as análises coletivas ficam à margem do processo, num enfoque que busca, apenas, disfarçar a transmissão de conceitos e definições, por meio da manipulação de objetos.

Dessa forma, quando o que se busca é um trabalho que transcenda a mera exposição de conceitos e que possibilite um enfoque interdisciplinar, parece-nos imprescindível não somente dispor de "recursos alternativos". É preciso que a ênfase recaia nas ações e na construção conjunta entre os sujeitos da ação, num processo que valorize a percepção e expressão dos sentidos. Em sala de aula, o professor pode mediar esse processo "ouvindo" os significados que emergem *na ação* de seus alunos, buscando sistematizar as idéias que surgem, estimulando o ato criador.

Outro aspecto relacionado ao uso dos materiais manipuláveis, que se mostrou relevante nos encontros, refere-se às possibilidades de analisar e pensar, junto aos professores-alunos, a prática de sala de aula. Pudemos vê-los discutindo os fatores envolvidos em um trabalho que busca transcender o já existente. Revelaram-se otimistas com relação às possibilidades de ensino e aprendizagem que a proposta apresentada pode proporcionar e vislumbraram possibilidades de ação em parceria com o colega. Em contrapartida, emergiram, também, considerações quanto às dificuldades e obstáculos a serem superados e aos recursos que se fazem necessários para uma prática diversificada. Destacaram-se, a nosso ver, as diferentes realidades escolares que os professores-alunos vivenciam em sua longa jornada de trabalho. O número reduzido de alunos e as condições oferecidas nas escolas da Rede Municipal estimularam a análise de ações para a realização de "novos" trabalhos, levando os professores-alunos a vislumbrarem possíveis resultados satisfatórios na utilização dos recursos apresentados nos encontros. Parece-nos, pois, importante considerar as características do ambiente de trabalho dos professores e as políticas educacionais envolvidas, quando as críticas incidem sobre o trabalho docente, já que manter a "mesmice" em sala de aula pode ser conseqüência da descrença sobre a possibilidade de que ações se convertam em benefícios educacionais.

Compreender as realidades dos que vivem o dia-a-dia da escola é condição indispensável para a transformação dessas realidades, em direção a um trabalho voltado para ações solidárias, planejado pela equipe escolar e que tenha conseqüências importantes na qualidade do sistema educativo.

Também, mostrou-se importante considerar a vivência da prática de ensino dos envolvidos, em análises reflexivas conjuntas sobre o que já foi realizado e sobre as possibilidades que se abrem. Analisar e discutir, juntamente com os professores-alunos, as condições que os cercam e as formas de superar os desafios que se colocam frente a uma prática diversificada, apontaram aspectos importantes a serem considerados, bem como caminhos a serem trilhados. Acreditamos que a relação dos professores com os conteúdos que lecionam pode vir a se transformar, quando eles têm oportunidades de ampliar as possibilidades de abordá-los, podendo analisar formas de inseri-los no universo de sua sala de aula.

No decorrer dos encontros, evidenciou-se a importância de estar-se disposto a mover-se em direção *ao outro*, reordenando referências quando necessário. Dessa forma, o trabalho multidisciplinar, construído no movimento de troca, deve caminhar na perspectiva do conhecimento que se completa em suas articulações com as disciplinas abordadas.

As conexões, desconexões, ações e relações evidenciadas na experiência multidisciplinar dos encontros com os professores-alunos destacaram a importância de se reconhecer como legítimas as diversas abordagens que emergiram dessa experiência. A Educação Matemática, como área que se caracteriza pela interdisciplinaridade, deve buscar formas de se relacionar com as áreas de conhecimento que constituem suas interfaces, dando relevância às atividades baseadas, sobretudo, no respeito ao outro, na solidariedade e na cooperação. Ações desse tipo requerem condutas diferenciadas dos pesquisadores. A experiência dos encontros permite que apontemos alguns aspectos a serem considerados nos trabalhos voltados para ações e práticas multi ou interdisciplinares:

- quais são as necessidades (humanas, materiais e metodológicas) necessárias para a realização de uma proposta interdisciplinar?
- quais os reflexos das vivências em estudos multidisciplinares na prática e nas concepções dos envolvidos?
- como lidar com situações inesperadas, como aquelas que envolvem a especificidade de uma das áreas?
- quais procedimentos são fundamentais ao pesquisador que busca realizar um trabalho interdisciplinar?

Retornar à origem desse estudo e à pergunta que emergiu de nossas indagações e questionamentos, enquanto professora inquieta por questões de nossa prática docente, leva-nos a refletir, também, sobre o caminhar da pesquisa: olhar para os encontros sem teorias prévias tomadas como "porto seguro" nos conduziu pelas perspectivas em que o fenômeno se doou nas falas e nos gestos dos sujeitos e dos pesquisadores, envolvendo afetividades, humores, ansiedades e planejamentos. Tratar os dados dessa forma permitiu-nos a aproximação e a compreensão das várias perspectivas abertas pelos sujeitos em suas facticidades e em suas liberdades de escolha. Pudemos compreender que, assim como a obra de arte doa e ganha significados no contato com cada espectador, as pessoas podem se revelar no olhar atento daquele que intenciona compreender o movimento das intencionalidades dessas pessoas, em uma situação de diálogo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, S. T. **Um estudo de pavimentações do plano utilizando caleidoscópios e o software Cabri-Géomètre II**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

ANDRADE, J. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. **Educação Matemática em Revista**, ano 11, n.17, p. 61 – 70, 2004.

ARANHA, C. S. G. **A arte visual na sala de aula**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1981.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (Org) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BAIER, T. **O nexo "geometria fractal - produção da ciência contemporânea" tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos**. São Paulo: Atual, 1993.

BARBOSA, R.M.; DOMINGUES, H. H; SILVA, E. A. **Atividades Educacionais com Tetraminós**. São José do Rio Preto: FIRP, 1995.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula**. São Paulo: Autêntica, 2002.

BARBOSA, R. M. **Poliminós**. Catanduva: IMES, 2005.

BATISTELA, R. F. **Um kit de espelhos planos para o ensino de geometria.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Arte. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia**: uma visão abrangente da educação. São Paulo: Olho d'Água, 1999.

BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia**: confrontos e avanços. São Paulo: Cortez, 2000.

BICUDO, M. A. V. **Tempo, tempo vivido e história**. São Paulo: Edusc, 2003.

BICUDO, M. A. V. A formação do professor: um olhar fenomenológico. In BICUDO, M. A. V. (Org.) **Formação de professores**: da incerteza a compreensão? São Paulo: Edusc, 2003.

BICUDO, M. A. V. A Pesquisa Interdisciplinar: uma possibilidade de construção do Trabalho Científico/acadêmico. In **Revista Ensaio**, no prelo.

BICUDO, M. A. V. Educação, ética e fenomenologia. In **Anais III Seminário Internacional de Pesquisa e Estudos Qualitativos e V Encontro de Fenomenologia e Análise do Existir**. São Bernardo do Campo: UMESP, 2006.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN S. K. **Investigação qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. São Paulo: Autêntica, 2003.

BORBA, M. C; PENTEADO, M. G. **A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão**. São Paulo: Olho d'água, 2000.

DAFFER, P. G. O.; CLEMENS, R. S. **Geometry***:* an investigative approach. Menlo Park: Addson-Wesley, 1977.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J.L. (Orgs) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

D'AMBRÓSIO, U. **Transdisciplinaridade**. São Paulo: Palas Athena, 1997.

DEL GRANDE, J. J. Percepção espacial e geometria primária. In Lindquist, Mary Montgomery; Shulte, Albert P. (org) **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1994.

DETONI, A. R. **Investigações acerca do espaço como modo de existência e da geometria que ocorre no pré-reflexivo**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2000.

DETONI, A. R.; PAULO R. M. **A organização dos dados da pesquisa em cenas.** In: BICUDO, M. A. V. Fenomenologia: confrontos e avanços. São Paulo: Cortez, 2000.

ESPÓSITO, V. H. C. **Construindo o conhecimento da criança adulto**: uma perspectiva interdisciplinar? São Paulo: Martinari, 2006.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática:** representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática.** Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/sala/didáticos/ recursos_didáticos.asp?aux=C>. Acesso em: 11 mar. 2005.

FONSECA, M. C. F. R. et al. **O Ensino da geometria na escola fundamental:** três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

GARDNER, M. **Divertimentos Matemáticos.** Tradução: de Bruno Mazza, São Paulo: IBRASA, 1967.

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

GOUVEIA, F. R. **Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópio e software de geometria dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G. C. **Tilings and Patterns**. New York: W. H. Freeman and Company, 1987.

HIRATSUKA, P. I. **A vivência da experiência da mudança da prática de ensino de matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

HAWKING, S. **O universo numa casca de noz**. Tradução: Ivo Korytowski, 6 ed., São Paulo: Arx, 2002.

KLUTH, V. S. Dos Significados da Interrogação para a Investigação em Educação Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 14, n. 15, 2001.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista-Geometria**, Blumenau, ano 3, n. 4, p. 4 - 13, 1995.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990.

MARTINS, R. A. **Ensino-aprendizagem de geometria:** uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

MARTINS, J. **Um enfoque fenomenológico do currículo:** educação como poíesis. São Paulo: Cortez, 1992.

MARTINS, J.; BICUDO, M. A. V. **A pesquisa qualitativa em psicologia**: fundamentos e recursos básicos. São Paulo: Educ/Moraes, 1988.

MOREIRA, C. M.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar.** São Paulo: Autêntica, 2005.

MURARI, C. Um caleidoscópio educacional modificado para trabalhos em grupo. **Revista da Educação Matemática**, São Paulo, n. 2, p. 11-15, 1995.

MURARI, C. **Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios**. (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

MURARI, C.; PEREZ, G.; BARBOSA, R. M. Caleidoscópios educacionales: coloraciones múltiples. **Revista de didáctica de las matemáticas**, n. 27, p7-20, 2001.

NACARATO, A. M. **Educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação:** currículo em ação de um grupo de professoras ao aprender ensinando geometria. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

OLIVEIRA, S. S. **Temas regionais em atividades de geometria:** uma proposta na formação continuada de professores de Manaus (AM) Dissertação (mestrado em educação matemática) - instituto de geociências e ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké,** Campinas, número 6,1996.

PAULO R. M. **A compreensão geométrica da criança:** um estudo fenomenológico. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, Campinas, n.1, p. 19-49, 1993.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1991.

PEREZ, G. A realidade sobre o ensino da geometria no 1º e 2º grau no estado de São Paulo. **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, n. 4, p.54-62, 1995.

PEREZ, G. A prática reflexiva do professor de matemática. In BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

POLETINI, A. Análise das experiências vividas determinando o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

PONTE, J. P., et al. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

REIS, J. A. S. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SILVA, E. A.; LOURENÇO, M. L; MARTINS, L. C. J. Uma introdução à pavimentação arquimediana do plano, **Boletim de Educação Matemática**, ano 9, n. 10, p. 53 a 66, 1994

SILVA, V. C. **Ensino de geometria através de ornamentos.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.

TURRIONI, A. M. S. **O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores**. (Dissertação Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.