

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE RIO CLARO

MARLI REGINA DOS SANTOS

**UM ESTUDO FENOMENOLÓGICO SOBRE O CONHECIMENTO
GEOMÉTRICO**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do *Campus* de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientadora: Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Rio Claro - SP
2013

510.1 Santos, Marli Regina dos
S237u Um estudo fenomenológico sobre o conhecimento
geométrico / Marli Regina dos Santos. - Rio Claro : [s.n.],
2013
214 f. : il., figs., quadros

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Maria Aparecida Viggiani Bicudo

1. Matemática – Filosofia. 2. Matemática - Estudo e
ensino. 3. Educação Matemática. 4. Fenomenologia. 5.
Geometria. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

MARLI REGINA DOS SANTOS

UM ESTUDO FENOMENOLÓGICO SOBRE O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Comissão Examinadora:

- Prof(a). Dr(a). MARIA APARECIDA VIGGIANI BICUDO (orientadora)
- Prof(a). Dr(a). ADLAI RALPH DETONI
- Prof(a). Dr(a). CONSTANÇA TEREZINHA MARCONDES CESAR
- Prof(a). Dr(a). ROSA MONTEIRO PAULO
- Prof(a). Dr(a). SÉRGIO ROBERTO NOBRE

Rio Claro/SP, 08 de março de 2013.

**A todo educador matemático
que se encanta com a mais
espontânea e matematicamente
rica afirmação de um aluno.**

AGRADECIMENTOS

“Toda subjetividade é intersubjetividade, e, mesmo com a ausência física, o outro está sempre comigo – nas palavras, nos instrumentos, na minha história pessoal”

Detoni

A escrita dos agradecimentos àqueles que nos auxiliaram na realização de uma tarefa só passa a ser concebível a partir do momento em que vislumbramos uma luz no fim do túnel indicando que a conclusão está próxima. O tempo nos torna refém da possibilidade de não agradecer, de modo justo, aqueles que a memória não foi capaz de lembrar nesse momento determinado e definitivo. E já se passaram mais de quatro anos desde a geração de um embrião de um projeto de pesquisa! Agradeço imensamente a cada *eu* que, ao longo de toda essa trajetória, deixou um pouco do seu *ser* no trabalho deste *eu que agora agradece*.

Agradeço à minha Família, pelo apoio incondicional!

À Maria pela orientação e pela amizade.

Aos sujeitos desta pesquisa, pela aprendizagem que me proporcionaram.

Aos membros da Banca de Qualificação e Defesa, pelas valiosas contribuições.

Ao Grupo FEM: Jamur, pelo diálogo e por não me deixar desanimar; Roger, pelo carinho e pelas lições; Rose, pelos momentos filosóficos e pelas gargalhadas; Fabiane, Bruna, Aninha e Flavio, pelos momentos coletivos. Agradeço também a todos os demais membros do FEM, pelas ricas discussões.

À Debora e Sonia, presentes de Rio Claro.

Ao David, pelo apoio em momentos difíceis da escrita.

À Adriana e Helô, por cuidarem da Dora com tanto carinho.

À Ina, Elisa, Ana, Alê e Zezé, pelo atendimento caloroso.

À UFV pelo apoio para a realização deste trabalho, em especial àqueles que no DMA me auxiliaram em diversos momentos.

RESUMO

Esta pesquisa interroga *como se dá o ensino e a aprendizagem da geometria assumida nos aspectos de compreensões pré-predicativas e nos encaminhamentos que direcionam para uma produção geométrica*. Atenta-se para as perspectivas pelas quais o fenômeno do ensino e aprendizagem da Geometria se dá nas vivências dos sujeitos deste estudo abrindo-se para os sentidos e os significados produzidos na temporalidade dessas vivências. Este estudo assume a fenomenologia *hursseliana* no que diz da visão de conhecimento e de mundo. Foi realizado um estudo de obras e autores que abordam temas relacionados a conhecimento, geometria, fenomenologia, dentre outros que se mostraram importantes no decorrer da pesquisa. Foi realizado um estudo de campo, efetivado como um curso, que abordou aspectos referentes à disposição de entes geométricos no espaço e às relações espaciais advindas, por meio da utilização de diferentes recursos materiais. O foco das análises incidiu sobre os aspectos significativos na constituição das ideias geométricas abordadas, enfatizando as compreensões e interpretações expostas pelos alunos. Realizando a redução fenomenológica, destacaram-se cinco ideias nucleares que dizem da possibilidade da produção em geometria: *manifestação de compreensões prévias e possibilidades de desdobramentos para as ideias e conceitos geométricos; movimentação do corpo-próprio expressando compreensão; modos de proceder e horizonte de aberturas; comunalização; e apoio no material manipulável: possibilidades e limites*. Indagando pela estrutura da rede tecida a partir das *ideias nucleares*, avançamos por compreensões mais abrangentes quanto à produção geométrica em seus aspectos humanos, ou seja, enquanto vivências que se dão na temporalidade e espacialidade das relações intersubjetivas, no mundo vida historicamente constituído em sua objetividade dinâmica.

Palavras-chave: Fenomenologia. Geometria Espacial. Pré-predicativo. Educação Matemática.

ABSTRACT

This research interrogates the meaning of teaching and learning of geometry when assumed in its pre-predicative comprehension aspects and in a process towards a production in geometry. For that, we turned to the perspectives in which the phenomenon of teaching and learning geometry shows itself in the lived experiences of the subjects that took part of this study, by means of opening their comprehension of the produced meanings in the temporality of those experiences. This study assumes the *husserlian* phenomenology in terms of vision of knowledge and of world. In that way, we accomplished a study of authors and matters that approached issues related to knowledge, geometry, phenomenology, and other subjects that became important during the process of researching. We also accomplished a field study, carried out as a course, which approached aspects regarding to the disposal of geometric entities in space and spatial relationships that could arise, through the use of different material resources. The focus of the analysis got on the significant aspects of the constitution of the geometric ideas discussed in the course, emphasizing the understandings and interpretations exposed by students. We performed the phenomenological reductions, that pointed out five nuclear ideas that talk about the possibility of production in geometry, named as: *expression of previous understandings and possibilities of unfolding geometric ideas and concepts; movement of one's own body expressing understanding; ways of proceeding and horizon of openings; communalization; and support of manipulative sources, its possibilities and limits*. We inquired the structure of the net woven by those nuclear ideas, carrying out a movement that advances in direction of broader comprehensions regarding the geometrical production in its human aspects, understood as experiences that occur in the temporality and spatiality of interpersonal relations, in the lifeworld historically constituted in its dynamic objectivity.

Keywords: Phenomenology. Spatial Geometry. Pre-predicative. Mathematics Education.

SUMÁRIO

CAPÍTULO PRIMEIRO

| | |
|---|---|
| A GERAÇÃO DO PROBLEMA E O ENLACE FENOMENOLÓGICO | 9 |
|---|---|

CAPÍTULO SEGUNDO

| | |
|---|----|
| UM OLHAR FENOMENOLÓGICO SOBRE O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO | 22 |
|---|----|

CAPÍTULO TERCEIRO

| | |
|--|----|
| PRODUZINDO O AMBIENTE DA PESQUISA..... | 36 |
|--|----|

| | |
|---|----|
| 3.1 A Pesquisa Fenomenológica e a Questão Diretriz..... | 36 |
|---|----|

| | |
|---|----|
| 3.2 Delimitações para a Realização de um Estudo de Campo..... | 39 |
|---|----|

| | |
|---|----|
| 3.3 Procedimentos de Descrição e Análise: a movimentação em torno dos dados | 49 |
|---|----|

CAPÍTULO QUARTO

| | |
|---|----|
| DESCREVENDO, ANALISANDO AS DESCRIÇÕES E BUSCANDO TRANSCENDÊNCIAS | 52 |
|---|----|

| | |
|----------------------------------|----|
| 4.1 Organização do Cenário | 52 |
|----------------------------------|----|

| | |
|-----------------------------------|----|
| 4.2 As Cenas Significativas | 57 |
|-----------------------------------|----|

| | |
|--|-----|
| 4.3 Buscando Transcendência: reflexões sobre as cenas..... | 181 |
|--|-----|

| | |
|--|-----|
| 4.4 Transcendendo as Análises Efetuadas: explicitação de uma síntese que busca por desdobramentos | 204 |
|--|-----|

| | |
|--|-----|
| RETOMANDO REFLEXIVAMENTE O EFETUADO..... | 207 |
|--|-----|

| | |
|--------------------|-----|
| BIBLIOGRAFIA | 211 |
|--------------------|-----|

CAPÍTULO PRIMEIRO

A GERAÇÃO DO PROBLEMA E O ENLACE FENOMENOLÓGICO

O ser humano tem suas crenças nas quais busca a segurança para realizar suas ações. Mas essas crenças vão se transformando e a elas são incorporadas novas perspectivas, bem como modos de agir são implementados ou deixados de lado no decorrer de nossas vidas. Face às necessidades, impossibilidades, perturbações, desconfortos, análises, recriamos nossas crenças e concepções que, de certa forma, guiam as nossas mais simples ações cotidianas. Assim inscrevemos nossa história, seja acadêmica, profissional, pessoal: somos levados no movimento da rede que desse modo se tece e cujo movimento também influencia o próprio tecer.

No processo de realização de uma pesquisa, a fundamentação de um estudo também está arraigada nessas recriações de nossas crenças, bem como em nossas vivências e nas factualidades¹ enfrentadas. Escolhemos um caminho, adentramos por compreensões e buscamos um retorno que nos seja adequado com relação ao ato de pesquisar e às nossas crenças. Essa adequação refere-se ao rigor no que é feito, ao tratamento dos resultados e à confiabilidade do que nos propomos a apresentar.

Ao indicar no título desta tese o termo *Fenomenológico*, se revelam indícios de alguns caminhos percorridos no decorrer da pesquisa, desde a sua gênese, bem como escolhas e atitudes que foram se incorporando a este estudo. Esta indicação explicita que o olhar das pesquisadoras vai ao encontro de uma postura concernente à visão de mundo e de realidade, bem como de metodologia, e avança nessa direção: a fenomenológica. Tal abordagem, em termos de modalidade de pesquisa, é consonante àquela da pesquisa qualitativa e tem como foco as experiências vivenciadas pelos indivíduos em seu cotidiano e que são tematizadas pelo pesquisador que busca aprofundar sua compreensão sobre o tema investigado.

Este estudo, em particular, se constituiu ao enfocarmos as experiências de ensino e de aprendizagem de Geometria efetivadas em sala de aula. Essa constituição tem sua base ancorada em nossas experiências como professora que se volta para as atividades de ensino de Matemática junto aos alunos, conduzindo o olhar para os encontros e desencontros ocorridos nas aulas de Geometria. Em um momento inicial, o que se revela como intuição primeira de questionamento, dado como um desconforto, refere-se ao insucesso de alunos ou da turma diante do tema estudado. Diz de uma preocupação ao perceber que muitos não avançam da

¹ Fatos ligados à dimensão contingente da existência humana, em sua indeterminação e imprevisibilidade.

intuição sensível para uma compreensão formalizada, ou seja, uma preocupação em compreender a relação entre o tratado pela Geometria, vista como ciência dedutiva, e a espacialidade vivenciada pelo sujeito no seu dia a dia. Em um segundo momento, que se entrelaça aos estudos em fenomenologia que realizamos, revela-se um trabalho que visa compreender o que está subjacente ao processo de ensino e aprendizagem de Geometria. Nesse viés, buscar essa compreensão nesta pesquisa de doutorado foi possibilitado e fez sentido a partir do estudo de textos de fenomenologia, principalmente daqueles que abordam as análises husserlianas sobre percepção, intuição, idealização, formalização e categorização.

Na experiência com o ensino de Matemática, pudemos constatar as dificuldades e os entraves que envolvem o ensino de Geometria, como a falta de recursos ou de metodologias para o seu ensino, mas também vislumbramos as possibilidades abertas pelo ensino fundado no diálogo e na troca, com o apoio de recursos didáticos diversos. Nossas vivências junto a alunos, professores e livros didáticos do Ensino Fundamental estimularam a realização de uma pesquisa de mestrado em Educação Matemática, tendo como tema a Geometria. O foco desse trabalho foi o ensino de Geometria por meio das pavimentações do plano e a pesquisa foi realizada junto a um grupo de professores de Matemática e de Arte (SANTOS, 2006). A experiência com professores de distintas áreas destacou os diferentes perfis pelos quais a Geometria se mostra no mundo humanamente vivido e as diferentes perspectivas em que podemos nos voltar para ela. Em um quadro de uma pintura, por exemplo, podem ser propostas possibilidades que se abrem para o ensino e para a aprendizagem das ideias geométricas mediante a experiência de olhar de modo atento tal quadro, dando-se destaque à visualização do espaço, aos traçados de linhas e curvas, bem como às formas que se delineiam, ainda que modo fugidio. Há um entrelaçamento de sentidos e de significados que se amalgamam, podendo constituir ideias geométricas que dizem do que está sendo compreendido e produzido. Assim, tais ideias se doam em diferentes situações vivenciadas e podem avançar em complexidade de sentidos e significados, de modo a se produzirem conceitos ou tão somente explicitar, ou mesmo anunciar, evidências percebidas. Desse modo, o conhecimento geométrico não se esgota em uma única área: ele é dinâmico e complexo, e solicita, mesmo nas aulas formais de Matemática, uma busca de sentido em diversas direções e diferentes contextos.

Além das experiências com o ensino de Geometria, nossa participação no grupo de pesquisa FEM² – Fenomenologia e Educação Matemática – revelou outras dimensões desse

² Grupo de pesquisa credenciado junto ao CNPq.

conhecimento. Nas reuniões do grupo são discutidas questões envolvendo Matemática, Fenomenologia, ensino, visão de mundo, concepções de conhecimento, modalidades de pesquisa fenomenológica, entre outros assuntos. Um dos temas que passou a fazer parte dessas discussões foi a Geometria do ponto de vista do seu ensino e aprendizagem, bem como do movimento de sua constituição e produção. Com esse foco, três integrantes do grupo realizaram um estudo dos trabalhos desenvolvidos por membros do FEM e que abordam esse tema (DETONI, 2000; PAULO, 2001; KLUTH, 2001, BICUDO e KLUTH, 2010)³. Tais trabalhos focalizam o ensino de Geometria e o conhecimento pré-predicativo, destacando os modos de a Geometria se dar no mundo-vida⁴ em um nível pré-teórico ainda não desdobrado em interpretações por meio da linguagem específica do fazer matemático, ou seja, em um nível existencial, sem se basear em teorizações nas quais já estão presentes as formalizações constantes de teoremas e axiomas. O conhecimento pré-predicativo refere-se ao conhecimento ainda não elaborado e trabalhado em termos de desdobramentos possibilitados pelos atos da razão e amparados na lógica e metodologia à disposição no mundo da ciência (MERLEAU-PONTY, 1990; BICUDO, 2010). Trata-se de um conhecimento construído nas vivências, em um movimento intencional⁵ de busca de compreensão do entorno, realizado subjetiva e intersubjetivamente, na medida em que o mundo percebido faz sentido para o sujeito, podendo ser expresso ao outro.

Os estudos realizados por membros do FEM, abordando o conhecimento geométrico pré-predicativo nascente na experiência junto a crianças, mostram que elas se movimentam, atentamente, gerando seu espaço, espacializando seu entorno, habitando horizontes que se abrem (DETONI, 2000; PAULO, 2001). Essa construção não se dá em um nível teórico, mas existencial, destacando o compreendido na experiência vivida. Do mesmo modo, ao expressar as ideias geométricas que vivenciou, a criança comunica aquilo que compreende na percepção⁶ sem pensá-los a partir de conceitos decorrentes de quadros teóricos pré-dados. O nome de uma figura geométrica plana ao ser expresso para explicar as características de um

³ MONDINI, Fabiane; MOCROSKY, Luciane; SANTOS, Marli. Regina. Compreensões de Geometria expressas por crianças: prelúdio fenomenológico.

⁴ Conforme Bicudo (2010, p. 23), *mundo-vida* é “entendido como a espacialidade (modos de sermos no espaço) e temporalidade (modos de sermos no tempo) em que vivemos com os outros seres humanos e os demais seres vivos e natureza, bem como, com todas as explicações científicas, religiosas, e de outras áreas de atividades e de conhecimento humano. Mundo não é um recipiente, uma coisa, mas um espaço que se estende à medida que as ações são efetuadas e cujo horizonte de compreensão se expande à medida que o sentido vai se fazendo para cada um nós e para a comunidade em que estamos inseridos”.

⁵ *Intencionalidade* diz do modo como estamos *voltados para, direcionados na direção de*. Será discutida a seguir.

⁶ A *percepção* é o ato de entrar em contato com o que se mostra, enquanto presença, ou seja, como percebido no agora. Será discutida a seguir.

sólido, por exemplo, não traz consigo as definições clássicas dos termos utilizados, mas carrega os significados e sentidos presentes no campo cultural em que a criança está enredada. Assim, quando ela usa, por exemplo, o termo *quadrado* para dizer do *cubo*, atenta-se para as faces do cubo em sua *quadraticidade*. A criança expressa sua compreensão do cubo por meio da linguagem disponível a ela e as palavras utilizadas não carregam significados por conta própria. Ao contrário, é dos significados atribuídos aos objetos na experiência vivida que ressurgem as palavras, dando sentido à expressão do dado na percepção.

Na abordagem fenomenológica, o espaço não é concebido como um recipiente no qual nos localizamos e sua geometrização não é dada *a priori*. O ser humano é espacial (HEIDEGGER, 2001) em seu próprio modo de ser: é o corpo-próprio, intencionalmente situado, que percebe, age, relaciona-se com as coisas, comunica, compreendendo e (re)criando seu entorno. Ao efetuar uma ação, o corpo-próprio⁷ vivencia experiências espaciais: guia-se em certa direção, visualiza determinada profundidade, estabelece relações de comparação, como maior, menor, mais perto, mais longe etc. Ele é o *ponto zero*, ou o ponto de referência do *aqui onde estou*, que estabelece a perspectiva pela qual se visualiza o horizonte no *aqui e agora* (MERLEAU-PONTY, 1990; BICUDO, 2010). E o que se mostra se mantém, mas não de forma estática, pois é constantemente (re) constituído nos vários perfis pelos quais o objeto pode ser, nova e novamente, visado.

Esse movimento de visar algo que se mostra vai além das percepções individuais, já que as ideias geométricas não são meramente elaborações subjetivas, pois a experiência vivida permite que o sujeito organize compreensões que se dão a partir de percepções primeiras que trazem o percebido e o seu entorno, ou seja, o contexto mundano do qual a intencionalidade destaca o focado, podendo expressá-las aos seus cossujeitos, companheiros da situação vivenciada, com quem compartilha modos de agir e expor. Essa comunalização pode avançar por (novas) compreensões entre os sujeitos envolvidos, tornando possível a construção intersubjetiva.

Voltar nossa atenção para o conhecimento geométrico pré-predicativo apontou a importância dos atos perceptivos no embasamento para a construção da Geometria, vista em sua complexidade teórica, destacando-se, por exemplo, sua formalização e o raciocínio dedutivo e indutivo que ela possibilita. Um professor pode destacar atividades que valorizem os modos de expressão das compreensões pré-predicativas de seus alunos, explorando seu entendimento, buscando dar sentido ao conceito ou teoria que visa ensinar.

⁷ *Corpo-próprio* “entendido como Leib, corpo com movimento intencional” (BICUDO & KLUTH, 2010, p.135). Será discutido a seguir.

É importante destacar que o conhecimento pré-predicativo, como fenomenologicamente é concebido, não se refere ao pensar da criança que busca compreender seu entorno, apenas. Refere-se a um conhecimento não tematizado em termos de predicções objetivas, ainda que possa vir a se desdobrar subjetiva e intersubjetivamente, por meio de diferentes atos. Um matemático, por exemplo, pode avançar por compreensões pré-predicativas ao atentar-se para um teorema de Geometria, buscando pela evidência geométrica que permita emitir juízos a respeito daquilo que investiga em termos do percebido (intuído) como significativo. Os desdobramentos das compreensões pré-predicativas podem possibilitar novas reelaborações quanto ao objeto em foco, bem como a constituição de conclusões predicativas quanto ao investigado.

Focando o desempenho e atuação dos alunos em Geometria e refletindo sobre o ensino desse conteúdo em sala de aula, algumas questões – e respostas possíveis – se colocaram para nós. Nota-se que o histórico da Geometria no currículo da Educação Básica explicita diversas tentativas de implementá-la, acompanhadas por poucas garantias de sucesso: por um lado, o destaque para a aplicação de cálculos pode levar a um fazer mecânico, reprodutivo e descontextualizado; por outro, a ênfase na sua utilidade prática pode excluir, ou deixar de lado, o ensino e a aprendizagem dos estruturantes dessa ciência⁸; e, por outro lado ainda, a ênfase na percepção intuitiva pode deixar de lado atividades que levem a desdobrá-la em produção de conhecimento geométrico.

Constata-se preponderância na busca por justificar o conhecimento geométrico por meio de sua utilidade. Mas essa utilidade já solicita a análise de diversos aspectos que deem conta de questões como: para quê? e para quem? Se considerarmos que esta ciência, com seus objetos e relações que se explicitam por meio de uma linguagem específica usada para designar as propriedades e características de uma classe de seres, objetos ou entidades geométricas, está presente no mundo-vida dos que se envolvem com ela e buscam compreendê-la (ou mesmo daqueles que apenas se utilizam de aplicações práticas sustentadas por esse arcabouço teórico), então a justificativa de sua importância não se coloca como motivadora para o seu estudo, mas a possibilidade de compreensão do seu sentido já mostra a sua relevância. Considerar que a formalização Matemática pertence apenas ao mundo do matemático, e que, portanto, não tem utilidade aparente e imediata, revela uma forma de

⁸ Ciência, entendida no âmbito da cultura ocidental contemporânea, é compreendida como estruturada em termos de ideias organizadas formalmente e categorizadas, de modo que se caracteriza por um campo de significados linguísticos específicos às diferentes áreas e por generalizações diversificadas em termos de rigor de raciocínios indutivo-dedutivos explicitados como leis que, por sua vez, sustentam inferências lógicas e aplicações possíveis (Discussão em sessão de orientação realizada em 28-1-2012).

omitir ao aluno a possibilidade de vislumbrar sua compreensão, ou um acomodamento diante de sua complexidade.

Assim, entendemos que se trata antes de possibilitar aberturas de horizontes para que a Geometria seja abordada em distintos modos de rigor, mostrando-se em seus perfis e estilos. Um trabalho escolar nesse sentido deve ser realizado na dimensão do entendimento das ideias e dos métodos de produção matemáticos, e não apenas em termos da aplicação de algoritmos, definições ou propriedades geométricas de modo reprodutivo apenas.

Por outro lado, sabemos que não é simples discutir a questão do ensino de Geometria, considerando-se as dificuldades e problemas enfrentados tanto por quem aprende como por quem ensina. O trabalho escolar cotidiano parece revelar que há um salto entre o conhecimento geométrico prático e o teorizado, entre os aspectos intuitivos do processo cognitivo e o conhecimento geométrico formalizado, e, assim compreendendo, outras questões se colocam: o que a transcendência dessas dicotomias envolve? Como o aluno avança em sua compreensão, considerando o desdobramento de ações cognitivas que desencadeiam a constituição de idealidades⁹ geométricas, abrangendo o conhecimento geométrico intuitivo e o formalizado?

Os estudos que efetuamos de obras *de e sobre* Edmund Husserl¹⁰ indicam que essas perguntas solicitam que fiquemos atentos aos atos de intuição e seus desdobramentos nos processos de constituição do objeto para o sujeito. Solicita uma análise fenomenológica diante dos atos de constituição de ideias, de idealidades, bem como aos processos de formalização e categorização envolvidos, na medida em que são (ou possam ser) explicitados nas atividades junto a alunos ao com eles trabalharmos a Geometria.

Husserl foi um matemático que se voltou sobre a seguinte problemática: como o mundo objetivo, isto é, a objetividade do que se apresenta à consciência, se torna objeto para a consciência. Investigando essa interrogação, seus estudos e ideias formam a base de sustentação de um (novo) pensar filosófico: o fenomenológico.

Os debates fundacionistas da Ciência de sua época indicavam, segundo seu ponto de vista, a necessidade de uma fenomenologia das vivências consoantes às investigações epistemológicas, e não mais uma filosofia baseada em um modelo naturalista no qual as Ciências buscavam garantias de rigor de seus resultados. Husserl tece dura crítica ao

⁹ *Idealidade* não tem, aqui, o sentido platônico. Será discutido mais detalhadamente no capítulo seguinte desta.

¹⁰ Edmund Husserl nasceu em Prossnitz (hoje Prostějov, na República Checa), em 8 de abril de 1859, e morreu em Freiburg, em 27 de abril de 1938. Estudou física, matemática, astronomia e filosofia nas universidades de Leipzig, Berlim e Viena. Em 1883, defendeu sua tese sobre cálculos de variações. Sob a influência de Franz Brentano, descobriu sua vocação filosófica. É considerado o pai da Fenomenologia.

psicologismo¹¹ de sua época, considerando que ele apresenta dois problemas essenciais: o dos fundamentos e métodos psicológicos e a questão do ponto de partida de suas investigações. Para ele, toda ciência necessita explicitar os seus conceitos fundamentais, isto é, deve explicitar a constituição de seus objetos de análise em suas estruturas essenciais.

Nesse sentido, a fenomenologia surge como uma busca de compreensão da constituição do conhecimento, abrangendo as vivências sentidas e percebidas, atos cognitivos e espirituais que se dão no corpo-vivo¹². Avança, portanto, a partir das sensações, das percepções, da empatia, dos atos cognitivos e espirituais, abordando a constituição de ideais, de idealidades, indo em direção à formalização e categorização de regiões ontológicas e dando destaque a diferentes nuances do conhecimento humano.

A fenomenologia tem como preocupação mostrar (e não demonstrar) os atos efetuados e as estruturas da experiência, clarificando-os. Neste sentido, ela é uma ciência eidética rigorosa, ou seja, busca pelas essências universais das vivências. Desse modo, difere das ciências de fato, que visam os fatos enquanto acontecimentos reais, espacial e temporalmente determinados no mundo.

Bicudo (2010, p.29) explica que a fenomenologia pode ser tomada como “a articulação do sentido do que se mostra, ou como reflexão sobre o que se mostra”. Buscando abrir para a compreensão do afirmado, a própria autora questiona: o que se mostra? como isso que se mostra se mostra? E apresenta os indícios para essa compreensão:

O mundo está aí, é o espaço onde somos e estamos em ação e onde as coisas – físicas, conjunto de situações etc. – estão. A fenomenologia aceita a realidade do mundo, não a coloca sob suspeição, isto é, não duvida dessa realidade tomada como fenomenal. O fenômeno é o que é visto disso que se mostra. Nós o compreendemos como o encontro entre quem olha, com atenção, e o visto.

O mundo como concebido na visão fenomenológica não diz apenas de um espaço tomado em sua fisicalidade onde as pessoas estão, mas refere-se ao mundo-vida, que é o solo no qual nos movemos intencionalmente, sempre com o outro, qualquer que seja esse outro. Esse é o solo onde as pessoas vivenciam suas experiências, reelaboram compreensões, comungam situações, nas quais percebem-se empaticamente como idênticos, não como o

¹¹ Soares (2008, p.20) esclarece que “o influxo da biologia e da psicologia em assuntos lógicos e filosóficos em geral determinou certos aspectos metodológicos e alguns pressupostos característicos nas doutrinas filosóficas de diversos autores. Tais características, aliadas, de um modo amplo, a traços positivistas e naturalistas na compreensão do mundo, da ciência e do homem, foram caracterizadas por Husserl, nas Investigações Lógicas, pelo termo de psicologismo (Psychologismus)”.

¹² Modo como Husserl se refere ao *Leib* (corpo vivo), diferenciando de *korper* (corpo físico), em *Ideas II* (BICUDO, 2010).

mesmo, mas como seres que se percebem como iguais e que podem se comunicar, de modo a intercambiar compreensões e interpretações, e compartilhar produções e experiências.

Voltando à citação acima, a frase “fenômeno é o que é visto disso que se mostra” já aponta para uma primeira compreensão: o fenômeno se mostra (ou se doa) para um olhar que busca vê-lo intencionalmente, compreendendo-o.

Compreender essa afirmação solicita que se mergulhe no discurso fenomenológico, de modo a dar-nos conta de algumas ideais que se evidenciam como centrais, tais como consciência, intencionalidade e percepção.

Consciência não tem o sentido de um lugar, como é referida em outras correntes filosóficas, científicas e religiosas, e mesmo no cotidiano em que as pessoas a ela se referem como sendo o lugar em que se encontram as ideias, onde se dão os juízos, onde se localiza a razão. Também não é um conteúdo de normas e de padrões morais que conduzem comportamentos éticos. E intencionalidade não tem o sentido de proposital.

Consciência é intencionalidade. Trata-se do modo pelo qual o corpo-próprio, ou corpo-vivo, se estende para o mundo, acolhendo e abarcando o sentido. A consciência intencional das ações que efetuamos carrega o sentido de *dar-se conta de*, em um movimento que envolve diferentes atos como os sensoriais, psicológicos e espirituais. Assim, a intencionalidade liga, de modo invisível, a direção de nosso olhar indagador para onde quer que ele se volte. Por exemplo: na recordação estamos voltados para o evento lembrado; no estudo de uma figura geométrica estamos voltados para determinada propriedade, como forma, estrutura, e assim por diante. E ainda que não abarquemos o objeto na totalidade de sua multiplicidade, ou seja, em todos os perfis possíveis, no movimento intencional ele é dado em uma totalidade unitária, não acabada, mas aberta em suas possibilidades.

Não seria exagero afirmar, diz Capalbo (2011), que “não há fenômeno que não seja fenômeno para uma consciência, não há consciência sem que ela seja consciência de algo, sem que ela seja determinada como uma certa maneira de visar o objeto focado, o mundo”. Estabelece-se uma correlação ver-visto, em um encontro no qual se dá a relação *noesis-noema*: para cada fenômeno focado pela consciência intencional há, como correspondência, uma maneira de o objeto se apresentar à consciência. Não há, portanto, a separação sujeito-objeto: a todo conteúdo visado ou objeto de atenção (noema) corresponde certa modalidade da consciência de se voltar para ele (noesis). Aqui o destaque está no movimento ver/visto focado em um fenomenal, entretanto esse movimento já traz consigo o solo em que esse fenomenal faz sentido, mostrando-se como fenômeno.

O objeto visado é o correlato intencional de uma subjetividade que o visa. Trata-se de um encontro no qual a subjetividade foca justamente isso e não aquilo, dessa forma e não de outra. O percebido na percepção, como ocorre no movimento *cogito/cogitatum*, pode se abrir a uma compreensão geral do todo, pela compreensão permitida pela síntese passiva¹³ e por articulações que se efetuam nas ações da consciência.

Mas como se dá esse encontro entre consciência intencional e objeto intencionado?

Esse encontro é o momento da percepção que não é apenas subjetiva, uma vez que é um ato intencional da consciência pelo qual a coisa vista é enlaçada e, desse modo, dada à consciência, como sentido percebido no ato da percepção ou na vivência. Trata-se de um ver imediato, entendido como intuição do que é isto que é visto. É um ver com sentido, uma vez que o visto é compreendido em sua totalidade, isto é, em sua figura, ou núcleo, e fundo, seu em torno, ou contexto. Não se trata de um raciocínio relacional, mas de uma compreensão do todo/parte. (BICUDO, 2010, p.30)

Ao nos dirigirmos para uma tela de uma obra de arte, por exemplo, em um primeiro momento, mesmo não sendo capazes de atentar para tudo o que ela nos mostra, temos uma compreensão de sua totalidade. Mesmo que foquemos a sua figura central, nesse caso o *núcleo intencionado*, o *em torno* é trazido como *fundo*, nos dando a totalidade disso que se mostra. Se, em um segundo momento, focamos outras partes da tela, buscando pelos detalhes que o artista criou, esses detalhes passarão a ser o *núcleo intencionado* que se doa em sua totalidade nessa nova perspectiva de perceber-se a obra de arte, e o *fundo* no qual o focado se destaca, e que possivelmente contém a figura central, passa a fazer parte do entorno.

É importante ressaltar que perceber, no sentido fenomenológico, não é apenas sentir sensações, como tocar, ouvir um som. “Perceber um objeto é intencioná-lo e torná-lo significativo, por meio de uma intuição originariamente doadora” (ALES BELLO, 2006). A percepção é um ato complexo ou um conjunto de atos, diferentemente de uma mera sensação, mesmo que dela tenha sido acarretada. Ao ouvir um som, identificamos a melodia, reativamos sentimentos como gostar, odiar, ficar triste. Colocamos em perspectiva a essência das coisas, nesse caso a essência do som que foi dada na percepção.

Tenho a sensação da claridade, percebo a luz enquanto presença. Mas o que é dado no ato de percepção não é o objeto luz, pois na percepção não reproduzimos o objeto. “Se a percepção fosse sempre o que pretende ser, isto é, a apresentação efetiva e genuína do próprio objeto, para cada objeto só haveria uma única percepção” (HUSSERL, 1980, p.47). Assim, há

¹³ Segundo Ales Bello (2006), na análise da síntese passiva Husserl atribui a constituição do objeto, de seus primeiros níveis, à forma do fluir a qual, em nível hylético, permite compreender a copresença do homogêneo e do heterogêneo. Isto é, permite compreender como os diversos campos sensoriais e seus dados podem ser unidos, constituindo-se em uma totalidade.

uma série indefinida de percepções parciais possíveis para o mesmo objeto. Ao perceber a claridade ocorre uma doação de sentido dada na forma em que a intencionalidade se volta para essa claridade (como algo que incomoda, como uma luz que ilumina etc.) e, também, no modo pelo qual a claridade se mostra em sua clareza.

A percepção nos dá um primeiro nível de compreensão do percebido, enlaçando o que se mostra no ato da percepção. Os atos perceptivos são:

uma abertura pelo sentido à possibilidade de uma compreensão mais elaborada, refletida. Esta, por sua vez, seria aberta pelos atos reflexivos, entendidos de segundo nível. São atos sobre a ação efetuada. (BICUDO, 2010, p. 31).

Os atos perceptivos solicitam desdobramentos, a serem (ou não) efetuados pela consciência intencional, numa retomada desses atos, na busca do sentido, avançando, na direção dos processos cognitivos, dentre eles a reflexão, a recordação, a imaginação etc.

A consciência

(...) é por si um movimento que atualiza, efetua os atos, e que articula o sentido desses atos, ou seja, efetua o processo reflexivo. É o movimento de dar-se conta, de se estar atento ao que fazemos e ao que ocorre. É um movimento que enlaça o ato de perceber, bem como o ato de refletir, abrindo espaço para refletir sobre si mesma, ou seja, sobre a consciência e seus atos, sobre quem efetua esses atos, ou seja, sobre o ser humano e sobre os modos pelos quais o produto das operações desses atos é comunicado, isto é, sobre a comunicação entre pessoas. (BICUDO, 2011, p. 31)

A consciência realiza diversos atos, buscando pelo sentido do que lhe é dado sentir e perceber. Correlatos a esses atos encontram-se os sentidos que se fazem sentir hyleticamente¹⁴ e que se doam, preenchendo¹⁵ o visado. Por isso, a intencionalidade da consciência não nos dá a determinação de um objeto, estabelecido e predefinido, mas sim a presença, em sua doação, do objeto intencionado. Essa presença em ato é dada na perspectiva pela qual se olha, se intenciona o focado, em uma intuição doadora de sentido.

Podemos nos voltar (atentivamente) para um triângulo, atentando-nos para a propriedade de ser uma figura fechada, ou de possuir três lados, ou três ângulos etc. É um ver imediato que nos dá o objeto em presença. Porém nem tudo é imediatamente reconhecível, ou pleno de significado na percepção; por exemplo, a relação entre um ângulo externo e os outros dois internos não adjacentes. Mas, sendo uma capacidade humana a possibilidade de vir a compreendê-las, uma vez interrogada aquela relação, nos debruçamos sobre o

¹⁴ Refere-se aos dados constituídos pelos conteúdos sensíveis, as sensações externas em sua materialidade no ato perceptivo.

¹⁵ O termo não diz de uma determinação que completa algo, mas refere-se ao preenchimento de sentido no ato intencional da percepção.

intencionado, buscando pelos sentidos que ele nos trás, experienciando novas perspectivas disso que está a se mostrar, nos vários perfis pelos quais podemos abarcá-lo. O conhecimento é, assim, um misto de preenchimento de sentido e intenção, na plenitude dos atos intuitivos, aberto no solo do mundo-vida em suas possibilidades de modos de doação do que se mostra. Na percepção são percebidos vieses do que nos chega enquanto fenômenos situados.

Os diferentes modos de doação de um mesmo objeto à consciência, dados nas vivências do corpo-próprio, convergem na direção do seu sentido, que é retomado nas (infindáveis) percepções e intuições possíveis desse mesmo objeto. Nas vivências, os sentidos vão se amalgamando em um núcleo estruturante. Esse processo de ‘amalgamar’ tem como matéria os sentidos e a intencionalidade sustenta o fluxo em que as ações se efetuam na consciência, reunindo o dado na percepção, por meio de atos diversos, como os abrangidos pela cognição, pelos atos psicológicos de afetividade e pelos espirituais, em todos articulados passíveis de serem expressos em modalidades diferentes pela linguagem. A compreensão, que então se encontra em processo, culmina mediante sínteses passiva e ativas, no movimento intencional da consciência (BICUDO, 2010).

Husserl denomina *eidos* ou *essência* à estrutura referente ao sentido do ser do objeto. Essa essência do que é intuído pela consciência nos é dada por meio da redução, num movimento intencional pelo qual colocamos *entre parênteses* o fenômeno, interrogando-o em movimentos que aprofundem e ampliem a compreensão, deixando surgir a ideia mediante uma síntese essencial. Husserl utiliza o termo *époché* para dizer dessa redução. Colocar entre parênteses refere-se ao movimento pelo qual o mundo pré-existente é colocado em suspensão de julgamento. Suspendemos nossas crenças e opiniões e nos voltamos apenas para o focado, buscando compreendê-lo em sua essência, explicitando a estrutura noético-noemática do ato. Pela redução buscamos dar-nos conta do percebido ou intuído, em modos que transcendem essas primeiras compreensões.

Assim, por meio de diferentes atos, a consciência volta-se intencionalmente para a significação do mundo. Tal significação é intencionada pela pluralidade de egos subjetivos, ou seja, pelos companheiros que partilham o mundo-vida, pois a consciência intencional não é uma subjetividade fechada em si: está sempre dirigida ao que a cerca, abarcando o solo comum no qual estão os cossujeitos e os demais entes. Vislumbrando horizontes, movemo-nos abrindo-nos para o outro, compreendendo sentidos e buscando expressar compreensões, atentando-nos também para as expressões dos nossos cossujeitos, confirmando, divergindo,

complementando falas, gestos e ações. Essa dimensão empática¹⁶, ou intropática, como a ela refere-se Ales Bello (2006), possibilitada pela comunicação e linguagem, constitui um movimento que aponta para a intersubjetividade e para o processo de constituição da objetividade.

A intersubjetividade, na abordagem fenomenológica, não se refere um coletivo de subjetividades e a objetividade não é uma determinação exata e externa a uma consciência que a intenciona. A intersubjetividade se constitui nas experiências vividas entre seres humanos, vivências essas passíveis de darem-se na experiência empática que realiza o ato de abertura ao outro, visto e assumido como semelhante, constituindo-o cossujeito que, mediante compreensões e expressões possibilitadas pelo estabelecimento de modos de comunicação, comungam ideias, ações, valores etc. O âmbito intersubjetivo ao mesmo tempo em que se mantém na organização histórica e cultural da tradição também sustenta essa organização.

A objetividade constituída no solo intersubjetivo se estrutura sobre as compreensões que se mantêm objetivamente pela linguagem, sustentando-se histórica e culturalmente¹⁷.

Focalizando o tema deste estudo, vemos que a Geometria, enquanto uma área de conhecimento que trata de entes específicos por meio de uma linguagem própria, é fruto das experiências intersubjetivas da comunidade de geômetras, trazidas e reformuladas, em sua objetividade, na história e na cultura. Por outro lado, tal Ciência, assim como outras Ciências teórico-formais, apesar de sustentar-se no mundo-vida, sofre um afastamento do seu sentido na existência humana (HUSSERL, 2012).

Considerando que as vivências, o pensamento pré-reflexivo, as expressões do compreendido e a comunhão de ideias entre cossujeitos fundam a possibilidade de significação da Geometria, esta investigação volta-se à subjetividade e à intersubjetividade e aos processos de busca pelo sentido das ideias geométricas que se dão no diálogo e na partilha entre cossujeitos que participam de atividades de ensino e aprendizagem. Direcionamos nossa atenção para aspectos do conhecimento pré-predicativo e seus desdobramentos possíveis em direção à construção coletiva do conhecimento geométrico, buscando pelas possibilidades de compreensão e respectivas materializações (por meio da linguagem, por exemplo) como o núcleo da constituição do conhecimento geométrico objetivamente construído.

¹⁶ A dimensão empática se constitui na percepção do outro ser humano como um semelhante, como consciência intencional que partilha o solo do mundo vida. Bicudo (2010, p.36) esclarece que “a empatia é o ato que nos abre o mundo da intersubjetividade”. Explica ainda que, no nível psíquico, diz de atos como repulsão, atração, simpatia, antipatia, entre outros.

¹⁷ Retomaremos esse assunto no capítulo seguinte.

A origem deste estudo, no sentido de seus fundamentos ou sustentação - e não enquanto o ato e o momento exato de sua ocorrência – aponta para os aspectos subjetivos e intersubjetivos de sua constituição. A possibilidade de estar *com o outro* (professores, livros, autores, alunos, softwares de geometria) *em um solo* (entendido como um *ground*) de experiências que contextualiza infraestruturas, especificando modos de vivenciar situações de ensino, de refletir sobre a prática e a Geometria, sustentam a investigação em foco.

Esta introdução buscou evidenciar vivências e ideias que se destacaram ao olhar da pesquisadora que retoma a caminhada da pesquisa. O caminhar solicita a busca por um norte que se atualiza a cada intuição havida, evidência percebida e conclusão explicitada. O caráter fenomenológico aqui se presentifica enquanto enraizado ao emaranhado dessa constituição, e não como um acessório que visa preencher lacunas relacionadas a rigor e método, em geral exigidos na busca por legitimar um trabalho acadêmico.

Assim, avançar na compreensão do tema pede que se retomem questões relacionadas à compreensão fenomenológica de conhecimento, bem como às compreensões historicamente constituídas quanto ao conhecimento geométrico. Dentre os aspectos que se mostraram importantes para compreender a construção desse conhecimento, destacamos os atos intencionais, a evidência, a idealização, a objetividade e a formalização. Buscando dialogar sobre tais temas, adentramos no capítulo seguinte.

CAPÍTULO SEGUNDO

UM OLHAR FENOMENOLÓGICO SOBRE O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO

Ao buscar compreender a Matemática – e a Geometria no caso específico deste estudo – questões se fazem presentes, como por exemplo: Quais são os seus objetos? Como os conhecemos? Quais são as suas aplicações no âmbito da própria Matemática e no cotidiano? Qual o papel da experiência, da tradição e da linguagem na sua produção e como esse corpo de conhecimento tem se construído¹⁸ na sua historicidade?

Ao abordarmos essas questões podemos ser conduzidos por diferentes concepções e posturas diante desse conhecimento e dos protagonistas dessa construção – as culturas e suas práticas de medição, os matemáticos consagrados em livros de história e aqueles anônimos, as pessoas que buscam compreender e ensinar esse conhecimento etc.

Adentrar pela Filosofia da Matemática e pelas diferentes formas de compreender e interpretar esse conhecimento (seja considerando sua constituição para um sujeito cognitivo ou sua produção em uma determinada civilização) nos leva em direção a aspectos humanos, históricos, ontológicos e epistemológicos.

A concepção de Matemática presente, em geral, no senso comum é a de que ela é um corpo de conhecimento pronto e inequívoco. A ideologia da certeza Matemática, de sua validade universal, revela-se enfaticamente presente nas atividades cotidianas, na escola e em outros ambientes de ensino, e, de certa forma, é corroborada por aqueles que se envolvem com tal conhecimento. Skovsmose (2007), ao discorrer sobre suas experiências no âmbito da educação matemática, destaca a função de estratificação derivada da matemática, que separa os estudantes entre aqueles que têm acesso ao poder e os que não têm. A exatidão da Matemática representa um elemento dogmático de certa forma alimentado por algumas modalidades de educação (SKOVSMOSE, 2007, p.81), podendo levar à ausência de perspectiva global sobre o processo de sua aprendizagem.

Se nos voltamos para a História da Matemática, notamos que os caminhos percorridos no processo de produção desse conhecimento vão se organizando de forma a dar destaque para as construções bem sucedidas: a estrutura que apresenta certo sucesso em seus procedimentos e produtos acaba por, paulatinamente, estabelecer-se em detrimento de outras. Por exemplo, a Geometria grega e sua sistematização em um modelo axiomático dedutivo se estabeleceram como um exemplo a ser seguido por todas as Ciências, seja pelo seu rigor e

¹⁸ Ao usar o termo construção, estamos nos referindo ao modo como a matemática (ou a geometria) é produzida, organizada e divulgada, independentemente de qualquer concepção filosófica que os termos possam remeter.

formalismo, seja pelas consequências possibilitadas em termos de inferências lógicas (SILVA, 2004).

Também a matemática árabe e seu sistema de numeração, pela sua aplicabilidade e avanços permitidos, sustentaram-se em relação ao próprio sistema de numeração grego. O mercador Fibonacci e sua obra *Liber Abaci* foram importantes para auxiliar na introdução do sistema indo-arábico na Europa Ocidental (STRUIK, 1997, p. 139), permitindo que esse conhecimento fosse disseminado entre os que lidavam, por exemplo, com o comércio. Mas esse sistema não foi aceito de imediato pela cultura europeia (STRUIK, 1997). Foi um processo gradativo que inclui contribuições, interesses e motivações, de tal modo que só é possível compreender a complexidade de tal processo ao voltar-nos para a sua história.

Mas não se pode negar a importância daquelas ideias Matemáticas colocadas de lado em detrimento de outras, visto que mesmo as que não conseguiram se manter ou avançar tiveram aplicações ou trouxeram contribuições para o avanço da Ciência e da sociedade em geral (SILVA, 2007). Poderíamos nos perguntar por que a matemática ou o modo de matematizar de uma determinada cultura indígena não se sustentou em nossa sociedade europeizada. Apesar de ser suficiente para tal cultura, o conhecimento produzido por ela não transpõe seus limites culturais e, assim, mesmo sendo útil para o grupo específico, ele não é assumido pelo outro, pela civilização ocidental dominadora, neste caso. Muitas vezes, tal conhecimento pode inclusive vir a se extinguir em detrimento da imposição dos conhecimentos do outro. Nesse aspecto, D'Ambrósio (2007, p.80) considera que chegamos a uma estrutura de sociedade que “impõe a conveniência e mesmo a necessidade de ensinar a língua, a matemática, a medicina, as leis do dominador aos dominados, sejam esses índios ou brancos, pobres ou ricos, crianças ou adultos”. A análise dessa questão é complexa, e não a temos como foco neste estudo, mas é importante destacar que não se trata de considerar os conhecimentos de diferentes grupos como passíveis de serem epistemologicamente hierarquizáveis. Eles estão sempre em relação com as necessidades sentidas e evidenciadas pelo próprio grupo, sua dinâmica cultural e o contexto histórico considerado. Há também razões políticas e relações de poder que dificultam a socialização e legitimação de certos conhecimentos, em detrimento de outros.

É como se houvesse um “processo de assepsia” na construção do conhecimento, que retira de campo certos empreendimentos, relativamente a outros, levando em conta contextos históricos, políticos, sociais, culturais. Já aqueles empreendimentos que se sustentam são mantidos e reconfigurados por novas aquisições, permanecendo no âmbito do que é considerado válido em sua historicidade. Estabelecem-se formas de ação, meios de produção

e produtos e quem consegue ter acesso e “dominá-los” ocupa um lugar de destaque. Por exemplo, foquemos em um algoritmo matemático: na medida em que auxiliam nas ações e podem possibilitar novas produções, vão se fixando como úteis e necessários, e aquele que consegue compreendê-lo e manipulá-lo tem a possibilidade de obter êxito em sua iniciativa, seja ela a de aprender a disciplina, de avançar em uma teoria Matemática ou mesmo de aplicar tal algoritmo mecanicamente (mas de modo correto) em situações cotidianas, como no comércio, por exemplo.

A certeza Matemática ganha força e se conserva. A partir do momento em que a Matemática e seus produtos se tornam bem sucedidos (mesmo para um grupo específico, como o de matemáticos, por exemplo) são transferidos de forma direta e sem reflexões maiores sobre esse processo de transferência. Quanto às ações pessoais de produção desse conhecimento, há um afastamento de seu significado ou significação original¹⁹ e, nesse sentido, ele passa a ser aceito como certo, não sendo questionado, apenas acolhido e repetido (HUSSLERL, 2012). Assim, apesar de toda a historicidade que envolve o conhecimento matemático, seu aspecto formal e as conquistas possibilitadas deixam como “resíduo” apenas a certeza matemática de uma ciência exata, muitas vezes confirmando ou (re)afirmando a indisposição de alguns para entendê-la.

Em geral, não se dá atenção para o outro lado dessa história que diz das dificuldades enfrentadas e obstáculos surgidos ao longo dessa construção.

Podemos pensar a Matemática como um edifício que, em certas etapas de sua constituição, enfrenta crises. Mas a cada crise, os esforços em compreender seus fundamentos levam a uma reflexão sobre esse conhecimento, permitindo avançar no projeto empreendido ou abrir novas possibilidades. Como exemplo, tomemos a primeira crise dos fundamentos da matemática (século V a.C.): a descoberta de que a diagonal de um quadrado qualquer não é comensurável com o lado desse quadrado revelou-se “amarga” para os pitagóricos já que levantava dúvidas quanto a tese que eles sustentavam de que os números eram os constituintes últimos da realidade (SILVA, 2007). “Se tudo é, de fato, feito de números, todas as grandezas deveriam poder ser comparadas quanto à quantidade de unidades que contêm; isto é, duas quaisquer grandezas deveriam ser comensuráveis” (SILVA 2007, p.33) e, portanto, a teoria que pregavam estava em xeque. Eudoxo (século IV a.C.) e sua teoria das proporções colocam à parte a teoria aritmética dos pitagóricos, superando o problema por meio de uma abordagem

¹⁹ O termo origem e seus derivados, como original, referem-se aos “processos mentais – mais tarde Husserl dirá intencionais ‘transcendentais’, não mais mentais – pelos quais certos objetos – ou, mais geralmente, certas ‘objetualidades’, isto é, quaisquer coisas sobre as quais podemos enunciar juízos verdadeiros – se apresentam à consciência com o sentido de existência que têm” (SILVA, 2010, p.50).

puramente geométrica que tornava supérflua qualquer referência a grandezas comensuráveis ou incommensuráveis (STRUİK, 1997, p.84).

As crises levantam suspeitas, estimulam ações e promovem o deslanchar do conhecimento. Suprimir a discussão quanto às crises enfrentadas ou quanto à falibilidade da matemática também é um modo de contribuir para a sustentação de sua certeza e validade universal e, de certo modo, pode excluir também análises mais amplas e críticas quanto aos processos de sua aprendizagem e possibilidades para o seu ensino.

Em geral, as crises levantam questões não só para os matemáticos envolvidos, mas também para os pensadores preocupados em compreender o que é esse conhecimento e como ele se dá, buscando entender o que é isso a Matemática e suas relações com os sujeitos de sua produção e divulgação. Essas questões, se não perpassam, também deveriam perpassar as preocupações daqueles que trabalham com esse conhecimento em ambientes de ensino e de aprendizagem. Conhecer a história dessa disciplina e analisar as diferentes formas de conceber esse conhecimento e seus objetos, em sua dimensão ontológica e epistemológica, nos leva a reflexões mais amplas quanto às conseqüentes ações que determinadas posturas frente à matemática remetem.

Focando nas concepções de Platão e de Aristóteles quanto ao conhecimento Matemático, elas revelam duas formas distintas, e porque não dizer divergentes, de se compreender esse conhecimento, seus objetos e a forma de acesso a eles. Segundo Silva (2004), para Platão a Matemática tem existência independente do mundo real, sendo que este apenas apresenta um reflexo imperfeito de entidades perfeitas, as entidades Matemáticas. É como se existisse um reino ideal onde a Matemática reina absoluta e tudo o que fazemos é descobrir como ter acesso a ela. Já para Aristóteles, o conhecimento matemático está assentado, ou tem suas origens, no mundo empírico e só é possível na medida em que o ser humano, no seu cotidiano e diante de suas necessidades, ações e invenções, abstrai determinadas características do objeto dado na realidade empírica.

Silva (2004) aponta os questionamentos que tais posturas suscitam:

O calcanhar de Aquiles das filosofias realistas é o problema do acesso: como percebemos, com a razão apenas, o mundo matemático, sem o concurso dos sentidos? O empirismo, por seu lado, tropeça na questão epistemológica: se os juízos matemáticos são afinal juízos sobre o mundo empírico, ainda que considerado por um aspecto particular, por que eles não estão sujeitos quanto à justificação - como de fato não estão - ao testemunho dos sentidos?

Atentemo-nos novamente à problemática propulsora dos trabalhos de Husserl: o modo pelo qual a subjetividade de um sujeito conhece e produz conhecimentos concernentes aos

objetos matemáticos, do ponto de vista de sua objetividade. Para ele, o conhecimento tem caráter subjetivo e pessoal e objetivo e universal, na medida em que seus fundamentos revelam ações individuais e, também, uma estrutura basilar cujo sentido ultrapassa as contingências e as particularidades da experiência. Mas este ultrapassar não se refere a algo supramundano, já que uma objetividade sempre é constituída nas dimensões da subjetividade e intersubjetividade.

Em *A Origem da Geometria*²⁰, Husserl traz reflexões sobre essa problemática, explicitando como as ideias geométricas, que se dão em atividades subjetivas e intersubjetivas, na comunidade matemática ou fora dela, vão se amalgamando de modo que as interconexões e formações vão se estabelecendo, fazendo com que a Geometria vá se constituindo em sua historicidade, de forma que sua existência se torne objetivamente dada, para “qualquer um que seja”.

Nesse intuito, Husserl (1987) persegue a história não factual para:

inquirir retrospectivamente no significado original da Geometria transmitida, que continuou a ser válida com este próprio significado – continuou e, ao mesmo tempo, estava mais desenvolvida, permanecendo simplesmente “Geometria” em todas as suas novas formas.

O autor destaca a tradição e a linguagem enquanto solo estruturante das construções humanas, em uma aquisição total de realizações que, pelo trabalho contínuo de atos humanos (individual, em grupo, na cultura), permitem novas aquisições, em uma síntese contínua que perfaz uma totalidade.

A tradição, no sentido concebido por Husserl, não diz de algo perpétuo ou imutável que se mantém “congelado”. Ela “traz” e, nesse trazer, se defronta, continuamente, com os inquiridos acerca dos conhecimentos assumidos como relevantes pela cultura e em determinado período histórico, sendo algo dinâmico, que não se prende em seu aspecto efêmero, pois pode ser comunicada pela linguagem.

O autor aponta que na comunicação o sujeito está consciente do seu outro, mediante os atos perceptivos e empáticos. Por meio dela, surgem comunidades entre os que podem reciprocamente expressar-se e comunicar-se, dizendo sobre o compreendido a respeito do mundo circunvizinhante. É uma compreensão comum (não idêntica), dada intersubjetivamente, tendo como solo o mundo-vida, emaranhando no processo de comunalização, os atos e processos perceptivos, empatia, compreensão e linguagem.

²⁰ Traduzido por Maria Aparecida Viggiani Bicudo e disponível em www.sepq.org.br.

As produções humanas são trazidas pela tradição, podendo ser repetidas, por pessoas, grupos, comunidades, e, na cadeia do entendimento destas repetições, o que é evidente surge como o igual: a estrutura comum, repetidamente produzida, torna-se um objeto para a consciência, mantendo-se na mobilidade da tradição pela evidência de sua estrutura invariante. A produção original de uma ideia, isto é, a evidência que ocorre na esfera subjetiva e o produto desse processo, pode ser intencionalmente reativada por outros.

Assim, o conhecimento geométrico que nasce na experiência vivida das ideias geométricas, comunalizado pelos sujeitos que buscam expressar sua compreensão ao outro, aguardando confirmação ou outra manifestação quanto ao exposto, em um movimento de retomada dessas compreensões, se mostra em sua possibilidade de ser novamente experienciado, pela mesma consciência intencional, pelos outros sujeitos ou por subjetividades que vivem ou não na mesma época e cultura e que podem vir a adentrar intencionalmente na comunidade que assim se estabelece. A compreensão nesse processo mostra-se inteligível para além de um grupo e da temporalidade na qual se encontra, avançando na direção de sua objetivação cultural e científica.

Esses modos de objetivação tem sua base nos atos da consciência, sustentando-se nos processos de idealização, na linguagem e na escrita.

No ato de perceber, o que foi percebido é enlaçado pela intencionalidade e desdobrado em compreensões mediante os atos da consciência. Tais atos se dão nos modos pelos quais nos voltamos para o percebido, ou seja, na intenção dirigida para ele. As modificações da intencionalidade direcionam a atenção que se volta para o focado.

Costuma-se comparar a atenção a uma luz que ilumina. Aquilo que se nota, no sentido específico, encontra-se num cone de luz mais ou menos iluminado, mas ele também pode recuar para a penumbra ou para a escuridão total. (...) A oscilação da luminosidade não altera aquilo que aparece em sua própria composição de sentido, mas clareza e obscuridade modificam os seus modos de aparecer, elas já se encontram na orientação do olhar para o objeto noemático. (HUSSERL, 2006, p.2012)

Podemos, por exemplo, nos voltar para o objeto em uma intenção meramente significativa ou numa atitude de retomada e busca por desdobramentos. Na experiência de tatear uma bola, podemos intuir imediatamente a sua forma, e realizar outros atos, tocando a superfície, sentindo sua textura, analisando a simetria da forma, constituindo uma totalidade disto que foi sendo percebido. Ao voltarmos-nos atentivamente para o objeto em questão, realizamos sínteses nas quais aquilo para o qual a intenção se volta é apresentado diretamente.

Há um preenchimento de sentido dado na própria intenção no fluxo de vividos²¹. Assim, dizemos que “a coisa” (o objeto em questão) se caracteriza pelo seu perspectivismo e pela impossibilidade de ser abarcada em um único ato. E mesmo em infinitos atos isto não seria possível: há sempre a possibilidade dela ser visada por novas noesis, na atividade intencional. Mas a ideia (do objeto) imanente ao ato é trazida com ele de modo global.

Um aspecto que adquire para Husserl importância peculiar no âmbito da construção do conhecimento e, portanto, na constituição das objetividades, é o conceito de intuição. Podemos destacar dois tipos primordiais de intuição: a sensorial e a essencial. A intuição sensorial é dada na experiência vivida diretamente com as ocorrências individuais, no ato perceptivo. A intuição essencial é o ver claro, ou a evidência, que se dá na abstração intencional (BICUDO, 2010). A abstração fenomenológica diz de uma operação reflexiva mediante a qual os elementos singulares são reunidos, visando à constituição de um todo de relações convergentes na reunião dos perfis percebidos, nos contextos em que a coisa percebida se dá, explicitando em uma síntese intencional suas características.

Consideremos as seguintes situações nas quais podemos experienciar, nas diferentes vivências, a ideia de circularidade: no ato de analisar um bambolê enquanto um objeto com forma circular; na atenção para o traçado de uma linha mais ou menos circular feita no papel; e na expressão matemática $x^2+y^2=r^2$ dada em uma aula de Geometria Analítica na qual atentamos para a possibilidade de uma representação circular em um sistema de coordenadas. Em cada uma delas, ao nos voltarmos para a circularidade possível, abstraímos os aspectos característicos da circularidade percebida e, ao intencionarmos o *eidos* dessa circularidade, sua essência é intencionalmente intuída. Essa intuição se dá com ideias já constituídas que se enrolam em modos de expressão, materializando-se e, com isso, tornam-se objetividades histórico-culturais comunicáveis. A ideia de circularidade, por assim dizer, se *materializa*.

A matéria era para nós aquele momento do ato objetivante que faz com que o ato represente exatamente este objeto e exatamente desta maneira, isto é, exatamente com tais articulações e formas, com uma referência especial exatamente a estas determinações ou relações. As representações cuja matéria é concordante não só representam em geral o mesmo objeto, mas o visam integralmente como o mesmo, a saber, como determinado de um modo completamente igual. (HUSSERL, 1980, p.68)

Assim, o objeto ideal (a ideia de circularidade, nos exemplos citados), como compreendido fenomenologicamente, não tem o sentido platônico de ser extramundano. Uma ideia é uma unidade de sentido visada intencionalmente por uma subjetividade que se doa em

²¹ Modo como se dá a experiência vivida em sua totalidade sintética contínua, em uma convergência ininterrupta de experiências passadas e futuras no presente.

suas possibilidades diante da intencionalidade do olhar que a visa e que, mediante atos de comunicação, em que a linguagem e a empatia são estruturantes, se objetualiza. A idealidade não é produzida por um determinado sujeito e mantida em sua subjetividade e nem se torna uma entidade abstratamente vazia, ou seja, ela não se encontra presa na realidade empírica que a suscitou. Porém ela nasce em atos subjetivos de um sujeito, corpo-próprio ou corpo-vivo, que vive no mundo-vida junto a outros sujeitos, em uma comunidade (e, talvez, sociedade), solo em que as compreensões são expressas e se fazem compreendidas e interpretadas, aceitas em sua propriedade e aplicabilidade, transcendendo, portanto a esfera subjetiva dos atos cognitivos e espirituais que a constituem e lançando-se em modos de ser objetivos.

As idealidades, no sentido fenomenológico, se dão no âmbito das ideias e de suas relações com as vivências. Nos atos de compreensão subjetiva que visam o objeto (atos noéticos) explicitam-se aspectos objetivos no complexo de modos de doação (noemas). Nas vivências, a coisa se dá em sua transcendência inesgotável, mas também em sua imanência que a torna única para a consciência. Voltando às situações apresentadas, pode-se intuir na multiplicidade de vivências a unidade da ideia de circularidade, que não se esgota nem se dissipa em um único ato. Em todas as situações há sínteses da circularidade e esse objeto ideal se mostra no modo de doação à consciência em sua unidade de sentido noemática.

As ideias e os objetos ideais se dão à consciência como unidades idênticas frente à infinita multiplicidade de vivências intencionais possíveis que os visam. Eles podem ser objetos para um infinito número de atos simultâneos ou em tempos distintos, atos de um mesmo sujeito empírico ou de sujeitos empíricos distintos, e conservar, em todos os atos possíveis, o mesmo *sentido ou significação*, a mesma essência de inteligibilidade intrínseca, congruente e unitária. (SOARES, 2006, p.65)

Este “mesmo *sentido ou significação*” não diz de algo idêntico, igual a si mesmo, mas de atos que suscitam sentidos e significados que indicam estilos de percepções e de visadas perspectivais de um fenômeno que se mostra mediante padrões do que se repete e que, em atos intencionais, constituem uma totalidade.

Também poderíamos, nas diferentes vivências da circularidade apresentadas, focar nossa atenção para outros aspectos daquelas vivências e, então, outras idealidades seriam colocadas em destaque – a brincadeira com o bambolê, o colorido do traçado, a igualdade da equação etc.

Poderíamos também avançar em termos de desencadeamentos de raciocínios, julgamentos e deduções, no estabelecimento de relações, as quais solicitam a compreensão de

outros aspectos ou objetos. Por exemplo, se, na vivência da forma circular, a consciência intencional se direcionasse para o “tamanho” da forma, constatando relações, expressando o compreendido e afirmando, por exemplo, que a área do círculo é aproximadamente três vezes o quadrado do seu raio, tal afirmação expressa um julgamento no qual outros elementos são solicitados para que se compreenda o afirmado. Há uma significação diferente daquela que foca cada ideia, individualmente, em sua unidade dada nas vivências intencionais. Carrega a ideia de círculo, de raio e de comparação, em um emaranhado complexo no qual o afirmado vai além dos termos que o compõem, uma vez que também traz um juízo sobre eles, avançando em aferições e checagens possíveis.

O afirmado pelo sujeito traz as perspectivas do olhar da consciência intencional que intui, predica e expressa tal afirmação, mas solicita ainda que diferentes sujeitos possam analisar e intuir sobre o afirmado, confirmando, discordando ou reelaborando o exposto, trazendo contribuições para o que foi explicitado. Requer também a possibilidade de o mesmo sujeito, em diferentes momentos e localizações, poder retomar novamente sua constatação.

Trata-se portanto de um movimento que abarca a consciência subjetiva e o solo intersubjetivo, na direção da constituição das idealidades geométricas. Conforme esclarece Bicudo (2010, p.38), a idealidade “é constituída na intencionalidade da subjetividade transcendental, no solo em que as experiências ocorrem e fazem sentido, tanto para o sujeito como para a comunidade de cosujeitos”. Essa constituição solicita a abstração essencial que revela uma totalidade de sentidos percebidos, lançando as ideias para outra dimensão e retendo-as, mediante os modos de expressar essa intuição e de encadear logicamente conexões de juízos. Conserva-se em termos de estabilidade significativa, porém doando-se em sua mobilidade essencial, para qualquer um que seja. Solicita uma materialidade não fixa que assegure sua existência objetiva, em um movimento que deslança na direção da constituição das objetividades, ou de objetualidades como diz Silva (2010, p.50).

Podemos entender que a objetividade

(...) é constituída na dialética subjetividade/intersubjetividade, cujo movimento se dá no solo do mundo-vida, que é histórico, cultural e baseado, primordialmente, na comunicação entre cosujeitos, sustentada pela estrutura lingüística. Sendo uma objetividade constituída, dá-se à interpretação daqueles que a focalizam intencionalmente, na busca do sentido. É uma objetividade que se estrutura sobre compreensões e interpretações históricas e culturais e que se mantém na linguagem e é veiculada pela tradição. (BICUDO, 2010, p.38)

A linguagem é trazida e reconfigurada pela tradição, possibilitando abertura de compreensões, interpretações, trocas e novas constituições e complementações, na qual a

intuição clara pode se dar para aquele que expressa o pensado ou para aquele que intencionalmente está dirigido ao que o outro comunica (como numa aula de geometria, por exemplo). Assim, a linguagem tem a dupla tarefa de possibilitar a manifestação da expressão, e trazer consigo camadas de sentido (dadas pela tradição) que possibilitem que as significações ocorram. Ou seja, traz a possibilidade de desdobramentos na direção da constituição intersubjetiva de núcleos noemáticos.

O mundo linguístico dado, histórica e culturalmente posto, coloca-nos diante às palavras que aí estão e vão preenchendo-se de sentidos. Mas as palavras não estão soltas à busca desse sentido, pois elas mesmas já foram expressas para darem conta disso que foi fazendo sentido para alguém ao serem pronunciadas. O expresso, por sua vez, é passível de ser nova e novamente reativado (por cossujeitos ou pelo mesmo indivíduo), ainda que possa adentrar por outros sentidos, convergindo para novas significações.

Diz-se, aqui, da linguagem que não se reduz ao seu ser gramatical, mas que se estrutura como um campo semântico e, se vivida, não serve como registro final do objeto, mas como um reabrir perceptivo (...) há um mundo linguístico aberto, cujos significados e significantes têm uma história. Não *usamos* simplesmente de uma linguagem, habitamo-la, o que quer dizer que, a cada uso, revivemos sua história desde os sentidos primeiros que permitiram seus significados. (DETONI, 2001)

Focando a Matemática como um corpo de conhecimentos, a linguagem que estrutura e mantém a produção desse conhecimento transcende os aspectos da comunicação que expressa sentidos e significados, possibilitando o *pensar junto* entre cossujeitos. Essa produção é organizada segundo uma lógica que revela sua própria organização, aquela de deduções e de aplicabilidades possíveis, e requer uma linguagem que se valha de símbolos e signos tão exatos quanto possível, para que não tragam uma polissemia de significados que inviabilize as compreensões. Deve possibilitar que se trate ou opere com seus objetos de modo sistemático, evidenciando propriedades, possibilitando inferências e deduções. Esse movimento diz da formalização do conhecimento matemático que se constitui na intenção dos cossujeito em expressar o que é essencial à sua *forma*, possibilitando compreensões e interpretações no solo das experiências matemáticas, em uma linguagem característica que se mostra apropriada para dizer do compreendido dentro de sua região de inquérito, na direção de uma estrutura adequada para o estudo desse domínio (SILVA, 2010).

No âmbito da Geometria, sua axiomatização explicita aspectos de uma linguagem particular e de procedimentos próprios, motivadores para fazer deslanchar o pensamento matemático e as teorias matemáticas, configurando-se como o caráter próprio do fazer matemático. Opera-se com objetos geométricos, abstraindo-os do cotidiano, atentando apenas

aos objetos em sua idealidade, sistematizando relações e consequências que se mostrem passíveis de serem justificadas a partir das afirmações anteriores, valendo-se de regras sintáticas gerais do discurso científico. Assim, em um movimento histórico, o conhecimento geométrico prático acumulado por povos, como os egípcios dentre outros, deslança na direção de uma ciência dedutiva, sistematizada e baseada em definições e axiomas em um encadeamento estruturado das ideias e conceitos (BICUDO, 1998).

A formalização da Geometria se dá por meio de um sistema sintático pelo qual operamos seus objetos, ainda que não fazendo referência a nenhum objeto particular, mas de modo que todos aqueles que comungam de sua estrutura comum possam vir a preenchê-lo de sentido.

Essa é uma lógica analítica fundada sobre a possibilidade formal, excluindo de seus encadeamentos qualquer aspecto material. (...) o encadeamento da argumentação dedutiva se configura no interior do pensamento simbólico que deixa os termos indeterminados, à espera de possíveis preenchimentos. (BICUDO, 2012, p.77)

A construção do conhecimento geométrico também aponta para a categorização da Geometria, indicando a constituição de uma região ontológica, que se dá na medida em que compreensões das características de modos de ser e conhecer seus objetos são articuladas. O movimento de categorização trabalha com as idealidades já articuladas na dimensão da formalização, reunindo-as, agora, em todos que dizem dos atos e realidades daquelas idealidades. Assim, de acordo com Bicudo (2010), a categoria indica diferentes regiões como a matéria que diz dos objetos em sua concretude, a região formal que diz de todo objeto, qualquer que seja, e assim por diante. As regiões indicadas pelas categorias podem se apresentar como um pequeno patrimônio de “verdades”, sustentadas e comunalizadas.

Ultrapassando os limites temporais da linguagem falada, a expressão linguística escrita documentada tem a função de tornar as comunicações possíveis, sem interlocutores pré-definidos, possibilitando a *existência persistente* dos *objetos ideais* até quando o inventor e seus companheiros não estiverem presentes ou já não estiverem vivos, e mesmo quando a cultura na qual habitam já não mais estiver ‘viva’. Por meio dela se dá o continuar-a-ser, mantendo-se ainda que modificando-se, da objetividade, ainda que possa não haver uma consciência intencionalmente atenta à sua evidência.

A Geometria é um conhecimento formal estruturado que tem sua origem assentada nas práticas do mundo-vida, sendo esse o *solo* em que a cultura, seus sujeitos e as idealizações se assentam. Ela é gerada e alimentada pela ‘comunidade geometradora’ (composta não somente por matemáticos, mas por todos aqueles que se voltam para a Geometria, pensando-a

formalmente, aplicando-a em uma praticidade experimental, efetuando ações no espaço que habita etc.) e insere-se com seu sentido em constante (re)constituição no espaço intersubjetivo dessa comunidade, possibilitado pela objetividade que lhe é própria, formando uma totalidade não estática, na qual novas camadas de sentido a ela se sobrepõem. Essas novas aquisições conferem a grandeza desse edifício mutante e ao mesmo tempo singular.

Compartilhando desse mundo-vida, colocamo-nos intencionalmente, na perspectiva de onde olhamos, buscando dar conta do que vemos e compreendemos, nesse caso, as ideias geométricas. Esse *buscar dar-nos conta de* exige atos intencionais que possibilitem a evidência de um conceito geométrico. A Geometria, por assim dizer, se reanima na vivência subjetiva realizada por um sujeito individual, em sua possibilidade de reativação, ao estar com seus cossujeitos contextualizado em um solo histórico e cultural. A intuição do sentido nos dá uma primeira abertura para essa possibilidade. Buscamos conhecer, dirigindo-nos ao objeto e visando-o em diferentes perspectivas, mesmo que saibamos da impossibilidade de abarcá-lo por todas as perspectivas possíveis. Mas na intuição pode ocorrer o ver claro, tornando evidente o que o intencionado é.

Assim, a intuição perceptiva nos coloca *em presença* do objeto intencionado não em seu preenchimento total, pois cada preenchimento nos é dado numa intenção, cada uma delas aberta ao horizonte do mundo-vida, dada em certa situação e em determinado instante. Mas cada nova camada de sentido pode abrir novas compreensões, sobrepondo-se a esse preenchimento, porém não de modo justaposto, ou acrescentado ao anteriormente compreendido, mas em um todo coeso, no movimento pelo qual se tece uma rede que entrelaça novos sentidos àqueles percebidos em outras situações.

Ao mesmo tempo em que a linguagem escrita se abre em sua possibilidade de reativação da evidência geométrica, pode também colocar-nos como vítimas de uma reprodução dada de modo passivo, sem que a intencionalidade se volte para a compreensão de sua evidência. Husserl (1970) destaca a diferença entre compreender passivamente uma expressão e torná-la evidente por reativar o seu significado. Mostra que a significação dada passivamente ocorre de modo semelhante a qualquer outra atividade que caiu na obscuridade: muitas vezes ela é despertada associativamente. O que é tomado apenas de modo passivo revela uma significação compreendida e controlada mecanicamente, na qual ideias são reunidas e se fundem associativamente, em um somatório de resultados sobrepostos.

Voltando nosso olhar para a sala de aula, vemos que a Geometria, enquanto uma construção humana, foi se estabelecendo nos currículos escolares por meio da tradição e seus conteúdos foram sendo definidos de acordo com o que se considerou importante em

determinado momento histórico. Mas a preocupação com a reativação original do significado das ideias geométricas, bem como com a relevância quanto ao que é ensinado, muitas vezes não foi (ou não é) tida como importante às atividades de ensino e não se deu (ou não se dá). O comum ao ensino da Geometria, em nossa sociedade, é destacar certos conteúdos – considerados como previamente necessários para a compreensão de outro conteúdo que, de acordo com a concepção de Ciência que se organiza em uma cadeia lógica, vem depois daquele nessa cadeia – e trabalhar com os conceitos e sentenças já prontos, em um modo rigorosamente metódico, por meio de associações reguladas, com o uso de fórmulas e algoritmos que legitimam a pretensa validade do apresentado.

O reativar, como tratado por Husserl, não se refere à aplicabilidade das ideias geométricas, nem à valorização do seu caráter axiomático, mas à busca da evidência da ideia geométrica e das ideias amalgamadas aos conceitos envolvidos.

Existimos na unidade de uma responsabilidade comum: o interesse de compreender, articular e projetar nas possibilidades do horizonte do mundo-vida. Em sala de aula, se torna importante explicar, na atividade que articula o que foi apresentado (na sentença geométrica de um livro didático, por exemplo), os significados do afirmado, trazendo, assim, a sua validade à realização do sujeito da aprendizagem, na direção do significado construído por meio de uma produção ativa. A estrutura que assim surge está sustentada na sua possibilidade de ser originalmente produzida e, desse modo, a realização bem sucedida desse processo, revela-se para o sujeito que age na evidência disto que foi tematizado em sala de aula e realizado por ele junto aos cossujeitos.

A Geometria, como produto da atividade humana veiculado pela tradição e mantido pela linguagem, enrola-se em constantes modificações devido às novas produções e às reproduções contínuas. O mesmo podemos dizer sobre o seu ensino: novos conteúdos são estabelecidos, livros se adaptam visando essas modificações e influenciando outras modificações no currículo, recursos didáticos diferenciados surgem (como os da Geometria dinâmica). Dessa forma, quando focamos o ensino de Geometria vêm junto ao olhar: alunos, conteúdo ensinado, disponibilidade dos envolvidos, atividades didáticas, contexto cultural e histórico da escola, recursos disponíveis, mídias, ciberespaço e suas características etc.

Ao interrogar a construção do conhecimento geométrico nas aulas de Geometria, é preciso considerar a importância de se abordar o seu ensino estruturado e explicitar maneiras de trabalhar-se com ele, reativando a intuição *original*, considerando o contexto no qual a situação de ensino se dá. É preciso que se questione o grau de formalização desejado para o

público a que ele se volta, bem como, as possibilidades para se avançar rumo à evidência geométrica.

Considerando que a Ciência é construída em um movimento dialético, de dúvidas, testagem de hipóteses, expressão de abstrações efetuadas em vivências de sujeitos e cossujeitos contextualizados, justificativas do encadeamento lógico-objetivo no mundo das experiências vividas, de aplicações práticas que também servem para validar, de certo modo, o teorizado que se materializa mediante linguagem escrita, ela traz em seu cerne a possibilidade de reativação de sua evidência original. Assim, é importante que fiquemos atentos para não incorrer no erro de subestimar a possibilidade de abordar-se a Geometria em sala de aula como um corpo de conhecimento estruturado. Não se trata de afirmar que o pensamento Científico ou o que se expressa de modo axiomatizado é hierarquicamente mais (ou menos) importante que outros. Mas, no contexto teórico em que aparece, ele apresenta um significado específico e, ainda, em termos de atividade humana, é um dos modos pelos quais o pensamento se organiza e aponta desencadeamentos possíveis, sendo, portanto, passível de se avançar nessa direção em sala de aula. Esse avançar não ocorre no vazio: tem um solo em que as experiências prévias, individuais e culturais, acontecem e são carregadas pela tradição; responde à intencionalidade do olhar, por sua vez presentificadas nos interesses, nas motivações dos modos pelos quais os indivíduos e grupos se comportam.

No sentido do exposto, este estudo tem como objetivo compreender, em uma abordagem fenomenológica, o movimento de construção do conhecimento geométrico que se dá em situações de ensino de conteúdos curriculares referentes às disposições espaciais dos entes geométricos, buscando destacar as intuições, compreensões, diálogos, análises, conclusões e testagens realizadas por alunos, considerando seus conhecimentos prévios, bem como as atividades propositalmente planejadas e os recursos utilizados.

Buscamos compreender e explicitar aspectos estruturantes que, nas atividades de ensino e de aprendizagem propostas, se mostram como intuídos em uma síntese ativa, a partir das vivências, atentando para a constituição e (re)elaboração das ideais geométricas.

A fenomenologia procura identificar a essência das modalidades intencionais e suas relações com os conteúdos ideais. Focar essa possibilidade está no cerne deste estudo que visa investigar aspectos constitutivos das idealidades geométricas que se presentificam em situações de ensino e aprendizagem enfocando os conteúdos geométricos nas atividades propostas.

CAPÍTULO TERCEIRO PRODUZINDO O AMBIENTE DA PESQUISA

3.1 A Pesquisa Fenomenológica e a Questão Diretriz

Adentrar nas discussões relativas aos procedimentos e às metodologias de pesquisa indica o quanto os aspectos relacionados à visão de mundo e de construção de conhecimento, implícitas a todo ato de pesquisar, podem direcionar para distintas atitudes e ações diante de um mesmo objeto de estudo.

Na realização de uma pesquisa de cunho qualitativo um aspecto que se destaca é o que se refere ao pesquisador e ao seu envolvimento no estudo: ele não é tido como neutro (e nem tem o anseio de manter-se neutro) diante do que busca pesquisar e compreender. Nesse sentido, torna-se importante que sejam esclarecidos os procedimentos realizados e as concepções que permeiam as tomadas de decisão do pesquisador, desvelando como se dá o movimento do pesquisar, uma vez que as diversas etapas da pesquisa não são estanques ou separadas entre si, mas enredam-se umas às outras nessa trama.

A fim de esclarecer os procedimentos realizados nesta pesquisa, procuramos explicitar, da forma mais abrangente possível, nossas posturas, compreensões e tomadas de decisão, explicando a movimentação realizada na busca da manifestação e compreensão do fenômeno indagado.

A fenomenologia aqui não se coloca apenas enquanto postura filosófica, ou forma de voltar-se para o mundo em suas possibilidades diante do que intentamos compreender, mas se apresenta também como modo de proceder na organização, interpretação e análise dos dados, indicando uma metodologia concernente a essa postura.

Buscando discorrer sobre os aspectos da pesquisa fenomenológica, dialogamos com autores que trabalham com essa abordagem (MARTINS & BICUDO, 1989; PAULO & DETONI, 2000, 2011; KLUTH, 2001; BICUDO, 2011) e que explicitam etapas orientadoras da pesquisa e destacam procedimentos que devem ser cuidadosamente tratados durante a investigação.

Uma das características proeminentes da pesquisa fenomenológica refere-se à ausência de pressuposições sobre o investigado, ou seja, um estudo fenomenológico não parte de hipóteses predeterminadas a serem comprovadas. Ao interrogar o fenômeno, busca-se *ir-à-coisa-mesma*, isto é, busca-se compreender o fenômeno em sua essência, na forma como é

dado na experiência vivida, sem embasamento em teorias previamente estabelecidas, avançando no movimento de compreensão.

Colocamos o fenômeno “em suspensão” (BICUDO, 2011), suspendendo-o dos juízos mundanos, atentando apenas para os modos pelos quais ele se apresenta na percepção, como verdade enquanto presença. Colocar em suspensão não significa negar a existência do mundo, mas destacar o fenômeno desse fundo mundano, suprimindo a validade objetiva das ciências e deixando-o aparecer no solo do mundo-vida. Busca-se expor as estruturas do fenômeno, avançando para além das vivências subjetivas e individualmente dadas na experiência vivida. Para isso, efetuamos a

Epoché, também chamada de redução ou de ato de colocar em evidência. Refere-se a dar destaque ao que está sendo interrogado, de modo que os atos da consciência constitutivos da geração do conhecimento sejam expostos. (BICUDO, 2010, p. 32)

Esse movimento de redução visa aos invariantes por meio dos quais podemos compreender a estrutura do fenômeno investigado.

Uma investigação fenomenológica é orientada pela sua questão diretriz, em um movimento complexo que envolve sujeito significativo²², pesquisador e pergunta.

O rigor no âmbito da pesquisa fenomenológica não se funda em metodologias construídas e aceitas como válidas em si, ou seja, independentemente da interrogação, da região de inquérito, da indagação pelo quê se pesquisa e como procede à investigação, mas se constitui no próprio movimento de perseguição à interrogação. Ele se instaura na própria dialética de perguntar, buscar pelo inquirido sempre atento ao *o quê* se busca conhecer, suas características antevistas, e os modos de proceder para dar conta do indagado. (BICUDO, 2011, p. 56)

O pesquisador volta-se para o fenômeno em foco e, guiado por sua interrogação, busca compreender a experiência vivenciada junto aos sujeitos de sua pesquisa, voltando-se também para sua própria vivência, que se entrelaça às dos demais. Ele direciona sua atenção para o fenômeno, a partir da perspectiva assumida de sua visada, ou seja, do seu *ponto zero* (MERLEAU-PONTY, 1990) que é aquele dado pela posição de seu corpo-próprio, explicitando, a todo o momento, suas ações e as formas pelas quais compreende e articula suas compreensões.

Para esclarecer o foco desta pesquisa e os movimentos efetuados, apresentamos a interrogação que a sustenta, assim explicitada:

²² Sujeito tomado como importante para a investigação, por vivenciar o fenômeno em foco. Neste estudo, são alunos em situação de ensino e aprendizagem de Geometria.

Como se dá o ensino e a aprendizagem da geometria assumida nos aspectos de compreensões pré-predicativas e nos encaminhamentos que direcionam para uma produção geométrica?

O “como” presente nessa interrogação indaga os modos pelos quais se dão as vivências dos sujeitos em situação de produzir conhecimento geométrico, abrindo-se para os sentidos e os significados que se produzem na temporalidade dessas vivências. A interrogação posta não tem a finalidade de solicitar uma explicação determinística, apresentando passos lineares a serem dados por qualquer sujeito para que essa produção seja desencadeada.

O indagado aponta para a compreensão dos atos intencionais que se presentificam em atividades geométricas, expressando possibilidades de produção de conhecimento em situação específica de ensinar e aprender Geometria. Abrange, então, questionamentos sobre conteúdos geométricos que estão presentes nos currículos de ensino de Geometria; modos pelos quais deslancha a compreensão do aluno quanto ao que lhe é ensinado; e processos de produção de conhecimento geométrico, destacando processos de abstração, de articulação de percepções compreendidas, interpretadas e comunicadas, de idealização e de formalização.

Buscamos *ver como* as ideias geométricas se presentificam, ou se mostram, em situações de ensino e aprendizagem de conteúdos geométricos, elencados da perspectiva de seus aspectos curriculares, em atividades que buscam valorizar situações potencializadoras para exploração de intuições e respectivos desdobramentos cognitivos, na direção da produção do conhecimento geométrico junto aos sujeitos, em sua objetividade constituída intersubjetivamente. Atentamos para as manifestações de alunos que se encontram voltados intencionalmente em um coletivo que se efetua ao estar com o outro (alunos, professora, pesquisadoras, textos produzidos, atividades elaboradas, materiais disponibilizados etc.).

É importante ressaltar que esta investigação não tem por meta efetuar uma aplicação da filosofia fenomenológica husserliana às situações de ensino e aprendizagem de Geometria, buscando comprovar (ou refutar) resultados. Buscou-se aqui, pela ótica fenomenológica, avançar na direção de uma interpretação que permita, a partir das análises efetuadas, compreender as camadas de sentido que se entrelaçam no processo de produção do conhecimento geométrico e realizar um salto teórico no que se refere à produção desse conhecimento, desvelando as vivências intencionais que se destacam ao olhar das pesquisadoras como aberturas para significações de ideias geométricas. Ao aprofundar o entendimento da obra de Husserl, buscamos a possibilidade de compreensão do fenômeno

focado, e não uma classificação em categorias de análise preestabelecidas a serem legitimadas.

3.2 Delimitações para a Realização de um Estudo de Campo

O processo investigativo, em seu delineamento, solicitou que o fenômeno interrogado fosse situado em um contexto específico de ensinar e aprender Geometria, na medida em que buscamos por compreensões pré-predicativas e encaminhamentos respectivos que direcionam para a produção do conhecimento geométrico. Mostrou-se importante para nós viver a experiência de *estar-com-alunos* em situação de ensinar e aprender Geometria, realizando um *estudo de campo* (como é denominado na linguagem da literatura da pesquisa em Ciências Humanas o procedimento de pesquisa que se refere ao estar junto aos sujeitos, investigando).

Por causa da abrangência do tema (a Geometria), um foco deveria ser demarcado: quais conteúdos geométricos seriam privilegiados no estudo de campo e em que nível de ensino atuaríamos.

O buscado sinalizava para as experiências de alunos em um contexto formal de ensino e aprendizagem de Geometria, pois dessa forma seria possível investigar os atos estruturantes e as compreensões expressas por eles durante o estudo de campo. Considerando as experiências prévias da pesquisadora ao lecionar na Educação Superior disciplinas como Geometria Euclidiana Plana, Geometria Analítica, Geometria Espacial, entre outras que solicitam compreensões de conceitos trabalhados nessas, uma possibilidade que se mostrou passível de aberturas foi a realização de atividades com alunos do curso de graduação em Matemática, abordando aspectos referentes à disposição dos entes geométricos no espaço e aos modos de compreender e interpretar a representação e as relações espaciais advindas.

As vivências da pesquisadora, ao ministrar as disciplinas citadas, permitiram a ela conhecer distintas formas de os alunos apresentarem suas ideias, dúvidas e elaborações, revelando amplas possibilidades para aberturas e partilhamento de compreensões em um ambiente coletivo. Nas manifestações verbais e gestuais dos alunos, na elaboração escrita de conclusões e entendimentos e nas avaliações efetuadas por eles, a pesquisadora pode dar-se conta dos significados que se evidenciam nos seus modos de proceder ao buscarem dar sentido ao apresentado. O aspecto intuitivo presente nas afirmações e nos questionamento dos alunos em atividades que envolviam compreensões do espaço e a busca da pesquisadora por contextualizar situações que envolviam a representação tridimensional de elementos

reafirmaram a possibilidade de realização de um estudo de campo no qual o espaço e as disposições espaciais dos entes geométricos pudessem ser abordados com o apoio de diferentes recursos, enfatizando as compreensões expostas pelos alunos.

Tematizar o espaço nas aulas das disciplinas consideradas revela, imediatamente, a complexidade do termo e dos modos pelos quais os alunos podem adentrar por diferentes sentidos e interpretações ao buscar compreender o exposto pelo professor. O termo espaço carrega uma vasta gama de possibilidades de significação, de modo que o próprio contexto de onde é destacado já solicita que certos aspectos de sua objetivação se explicitem em detrimento de outros. Para uma criança o espaço é aquele em que ela está localizada em seu alcance visual; numa aula de mecânica é o deslocamento realizado por um móvel; ao atentar para os planetas e estrelas, é o universo, o espaço sideral. As diferentes nuances destacadas a cada entendimento do termo, em distintos contextos, levam a inferir que se trata de distintos objetos.

Se considerarmos o modo como o espaço é abordado em outras áreas ou disciplinas, as perspectivas pelas quais é visado apontam para aspectos intrincados ao próprio fazer dessas disciplinas. Milton Santos (2006), ao focalizar o espaço geográfico, caracteriza-o em termos da inseparabilidade da ação humana, que o recria e modifica. Essa totalidade se destaca como traço dinâmico central na criação dos lugares (geográficos), que se renovam a cada movimento da sociedade. Assim, para o autor, o espaço é visto como uma forma-conteúdo, isto é, como uma forma que não tem existência empírica e filosófica se for considerada separadamente do conteúdo e um conteúdo que não poderia existir sem a forma que o abrigou (SANTOS, 2006).

No dicionário de filosofia (ABBAGNANO, 2007), destacam-se diferentes modos de se conceber o espaço, por diferentes pensadores ou correntes filosóficas: como o lugar onde a coisa está situada, ou seja, como sendo de grandeza suficiente para abarcá-la; como espaço vazio, que mesmo ausente de matéria dela necessita para ser definido; como espaço absoluto (sem relação com algo exterior) ou relativo (de dimensão móvel e que se dá na relação entre os corpos), ambos idênticos em sua forma; passível de ser distorcido proporcionalmente à massa e densidade dos objetos que abarca (Teoria Geral da Relatividade de Einstein); como associado ao instante em que se verifica determinado evento; como primeiro Deus, já que é o limite dos céus e o lugar de todas as coisas.

Assim, a geometrização do espaço é apenas um dentre muitos modos pelos quais podemos nos embrenhar ao buscar compreender o que ele é ou seu modo de ser. E mesmo

focalizando a Geometria formalizada, outras análises quanto à sua relação com o espaço se colocam:

Se a geometria euclidiana, por exemplo, estrutura de modo adequado nossa experiência espacial cotidiana, a geometria riemanniana, que choca essa experiência, revela-se no entanto mais adequada para dar conta das relações espaciais de uma outra dimensão da experiência. Parece que, como queria Poincaré, o espaço não tem uma forma determinada *a priori*, cabendo nesta ou naquela geometria conforme as circunstâncias e conveniências. (SILVA, 2004)

A geometrização do espaço ocorre à medida em se busca dar conta da diversidade da experiência humana, e nesse sentido destacam-se também a Geometria Projetiva, a Descritiva e a Topológica, cada qual atentando para uma particularidade ou característica do espaço e de seus objetos. A própria axiomatização da Geometria também se revela como um modo singular de o ser humano abordar o espaço e os entes geométricos, colocando de lado o carácter meramente intuitivo e empírico e assumindo a Geometria como disciplina racional, dedutiva e lógica, a partir da criação de definições, axiomas, postulados e teoremas (SILVA, 2007). Essa emergência de um modo particular de proceder e compreender se dá pela possibilidade, necessidade e capacidade humana de realizar tal empreendimento. Assim, a axiomatização da Geometria também se mostra como um modo humano de compreender, latente em sua possibilidade e em relação com o espaço e os sentidos que se desdobram.

Por outro lado, a maioria dos livros-textos das disciplinas de Geometria Espacial, Plana, Analítica, entre outras (STEINBRUCH & WINTERLE, 1987; BARBOSA, 1995; DOLCE & POMPEO, 1999 e 1997; BOULOS & CAMARGO, 2005), ao atentar para o carácter formal da Geometria, não valoriza a exploração das diferentes significações relativas ao espaço, nem os modos como os alunos compreendem e interpretam as ideias e objetos geométricos, suas características e relações entre eles. Em geral, os livros apresentam o espaço como aquele no qual se deve operar com entes ideais, como pontos, retas e planos, identificando relações, propriedades e consequências, suprimindo qualquer outro aspecto ou discussão divergente do modo matematicamente regulado de se compreender o espaço.

Durante o tempo em que trabalhou com as disciplinas mencionadas, a pesquisadora constatou que as dificuldades comuns entre os alunos não se referiam ao tratamento das informações e à realização de procedimentos, mas às dificuldades de interpretar enunciados e visualizar possibilidades espaciais. Muitas vezes a relação entre a representação tridimensional de uma situação, imaginada ou ilustrada, e a representação bidimensional indicava a necessidade de um trabalho prévio de exploração dessas representações.

Assim, mesmo que as disciplinas citadas foquem o espaço, os entes geométricos e suas relações, revela-se importante a realização de um trabalho voltado para as representações tridimensionais e para a percepção espacial dos alunos, auxiliando para que possam analisar e inferir afirmações no contexto dessas disciplinas.

Mostrou-se importante para nós dialogar com os alunos, investigando suas compreensões quanto ao espaço e aos conceitos geométricos, os modos como representam retas, planos e pontos, em sua idealidade infinita ou adimensional, os procedimentos que realizam para aferir sobre disposições no espaço, como experimentam os problemas espaciais e exploram o registro gráfico dos objetos bi e tridimensionais. Assim, nossa atenção se direcionou para a elaboração de atividades que contemplassem esses aspectos.

Contextualizado o foco do estudo de campo com relação aos aspectos da Geometria que seriam abordados, pensou-se na experiência passível de ser vivenciada, registrada e analisada em um curso normal da disciplina de Geometria Analítica, com alunos de graduação, ingressantes ou não, uma vez que ela é oferecida no primeiro período e dedica parte de sua ementa ao estudo da disposição dos entes geométricos no espaço.

A proposta inicial para o estudo de campo era trabalhar com todos os alunos matriculados na disciplina ao longo de sua duração, que é de um semestre. Iniciamos a efetivação dessa proposta, porém, na tentativa de implementá-la, alguns dificultadores se apresentaram de forma enfática. A quantidade de alunos nas turmas da disciplina (em média 60 alunos por turma), a dinâmica estabelecida entre eles, relativa ao entrosamento em sala de aula, a baixa expectativa com a graduação em Matemática e com a disciplina e o fato de muitos alunos, por estarem cursando novamente a disciplina, encontrarem-se impregnados pela linguagem algébrica, evidenciaram entraves relativos à espontaneidade das suas manifestações, às possibilidades de diálogos e ao próprio registro dos dados, em vídeo e áudio.

Esses fatores solicitaram a reformulação da proposta do estudo de campo. Mostrou-se mais apropriada a realização de um curso de extensão universitária direcionado para alunos de graduação em Matemática, focando aspectos da geometria espacial e de disposições no espaço. Na elaboração da proposta para o curso buscou-se dar destaque aos assuntos que se mostraram como importantes motivadores para desdobramentos de compreensões e trocas entre os participantes, enfatizando as interpretações e os modos de proceder dos alunos ao voltarem-se para o espaço e os entes geométricos.

A proposta de realização de um curso no estudo de campo destaca alguns diferenciais em relação à disciplina regular. Primeiramente, a não obrigatoriedade favorece que somente

os alunos interessados se matriculem. Além disso, a quantidade reduzida de alunos contribui para que os diálogos ocorram mais espontaneamente e que o registro do estudo de campo seja mais eficiente.

Ainda buscando a efetivação do estudo de campo, o curso foi oferecido, inicialmente, para alunos calouros do primeiro ano da Licenciatura em Matemática e, posteriormente, aos demais licenciandos em Matemática dos cursos diurno e noturno, desde que não tivessem cursado ou concluído as disciplinas de Geometria Analítica e Geometria Espacial. A prioridade para matrícula foi dada aos primeiros, devido ao número limitado de 20 vagas.

Ao focalizar os alunos calouros do curso, buscamos explorar as manifestações de suas intuições quanto aos questionamentos propostos durante a realização das atividades, uma vez que eles foram menos expostos aos textos e às práticas comuns do fazer matemático dessas disciplinas, bem como à sua linguagem e às demonstrações matemáticas, possibilitando a abertura para as intuições e a expressão mais espontânea de suas compreensões, destacando aspectos de suas vivências frente ao interrogado. Ao estender o curso para os demais alunos, vislumbramos a possibilidade de motivar discussões e momentos de partilhamento de sentidos e interpretações para o proposto, uma vez que eles poderiam manifestar as compreensões que traziam das disciplinas cursadas, porém já em situação de voltar-se para as ideias que lhes foram apresentadas em outra ocasião nas aulas formais.

A proposta do curso de extensão não foi a de expor ou *transmitir* os conceitos e conteúdos geométricos em via única do professor para o aluno. O objetivo central foi que as atividades fluíssem mais livremente, diante da inexistência de qualquer obrigatoriedade quanto ao desempenho em termos de resultados considerados certos ou errados. As atividades planejadas não visaram à aplicação de conhecimentos geométricos predeterminados ou fórmulas já concluídas, mas sim a busca pelo significado de aspectos geométricos dessas fórmulas diante das atividades propostas, bem como as reelaborações possibilitadas pelas trocas de compreensões entre os envolvidos.

A elaboração do curso solicitou atenção para o tema de estudo, para o contexto no qual ele seria realizado, bem como para as vivências dos alunos, de forma que as atividades propostas possibilitassem a abertura para que as ideias e compreensões dos sujeitos emergissem nos encontros. No curso de extensão oferecido, buscamos abordar aspectos dos conteúdos geométricos curriculares, valorizando as vivências dos envolvidos, as intuições diante das atividades e a manifestação das compreensões e dos sentidos. Assim, a elaboração das atividades propostas para o curso não desconsiderou os livros-textos das disciplinas (STEINBRUCH & WINTERLE, 1987; BARBOSA, 1995; DOLCE & POMPEO, 1999 e

1997; BOULOS & CAMARGO, 2005). Ao contrário, esses textos embasaram muitas situações propostas e motivaram a criação de algumas dinâmicas que pudessem auxiliar na compreensão das ideias geométricas centrais a certos exercícios, porém buscando um novo formato que possibilitasse o diálogo e não enfatizasse a apresentação e aplicação de definições e propriedades. As atividades foram remodeladas, destacando-se aspectos importantes e lançando mão de diferentes recursos didáticos, como materiais manipuláveis, figuras tridimensionais feitas de cartolina ou acrílico, fichas de trabalho etc, visando às discussões coletivas e à elaboração conjunta, e não às aplicações de teoremas ou conceitos a serem expostos aos alunos.

Ainda quanto à elaboração do curso de extensão, mostrou-se importante delinear, previamente à sua efetivação, os sentidos percebidos e os significados atribuídos por alunos de graduação em Matemática quanto aos entes geométricos nucleares à Geometria: ponto, reta, plano e espaço. Na experiência da pesquisadora como docente, ela constatou que os sentidos e as significações a que esses termos remetiam nas expressões dos alunos estavam fortemente relacionados a diferentes vivências cotidianas, influenciando diretamente as respostas dos alunos em questionamentos orais, testes e provas. Portanto, compreender como os alunos interpretavam esses termos, em especial os ingressantes do curso de Matemática (no caso específico deste estudo), revelou-se imprescindível na medida em que poderia colaborar na elaboração das atividades e exploração de temas que pudessem auxiliar no encaminhamento dos encontros. Entendemos que as respostas assim obtidas poderiam indicar aspectos a serem enfocados na elaboração do curso a ser desenvolvido, uma vez que tratavam da compreensão de ideias essenciais à Geometria.

Assim, no semestre anterior ao início do curso de extensão, ou seja, durante a elaboração do curso, nos voltamos para as compreensões dos alunos calouros do curso de Matemática, interrogando-os. Aplicamos um questionário aos alunos da disciplina do curso regular, no qual foi solicitado que escrevessem, do modo mais espontâneo possível, sobre o seu entendimento quanto à ideia de ponto, reta, plano e espaço. Foi explicado aos alunos respondentes que eles não precisariam se restringir ao entendimento matemático a que estes conceitos poderiam sugerir e que, se quisessem, poderiam fazer desenhos e esboços que auxiliassem na explicação.

Diante da complexidade das compreensões expressas, consideramos importante destacar aqui os aspectos que se presentificaram nas respostas dos alunos, uma vez que, ao analisar as compreensões manifestadas, foi possível abrir nossa própria compreensão sobre o indagado, já que muitas vezes, no cotidiano daquele que leciona, eles ficam limitados a certo

aspecto do pensar matemático, ofuscando a complexidade das vivências significativas que perfazem sua constituição.

Não buscamos fazer, aqui, uma análise em termos de teorizações possíveis, mas expor os sentidos relacionados a esses entes geométricos, considerando as respostas dos alunos, em um voltar-se para elas de modo atento, enquanto pesquisadora preocupada com o tema e professora em busca de compreender as manifestações dos alunos.

PONTO

As descrições relativas ao *ponto*, apresentadas pelos alunos, giram em torno:

- ✓ *da sua representação cartesiana em duas dimensões;*
- ✓ *da possibilidade de estar localizado em um lugar bem determinado, como em uma “reta”, ou no cruzamento de duas retas;*
- ✓ *do que não possui, como dimensão ou extensão;*
- ✓ *da comparação com outros entes, indicando a qualidade de ser menor que um segmento, por exemplo;*
- ✓ *da sua importância, já que tudo é gerado dele;*
- ✓ *de ser uma localização no espaço;*
- ✓ *da relação com situações cotidianas que são trazidas a fim de elaborar imagens associadas ao ponto, como um furo ou uma estrela; e*
- ✓ *da impossibilidade de descrever algo cujo substantivo já predica todas as suas qualidades.*

RETA

As descrições dos alunos quanto à *reta* apontam para:

- ✓ *sua relação com o ponto, como a quantidade de pontos envolvidos na determinação da reta (o termo conjunto revela a necessidade de, pelo menos, mais de um) e a forma como eles estão dispostos (paralelos, alinhados, na mesma direção);*
- ✓ *algo que diz da determinação da (menor) distância entre dois pontos;*
- ✓ *a “forma” da reta, em termos de sua espessura, ou daquilo que não possui, como curvas; e*
- ✓ *sua relação com uma equação do primeiro grau, em uma abordagem cartesiana.*

PLANO

Quanto ao *plano*, os alunos:

- ✓ relacionam-no com a possibilidade de analisar suas medidas, ou verificar suas dimensões, sendo algo “a mais” que na reta;
- ✓ caracterizam-no em termos do que pode ser feito em um plano ou derivado dele, ou do que ele pode conter e seus elementos constituintes (se a reta possui infinitos pontos, o plano deveria possuir infinitas retas);
- ✓ Relacionam-no à sua apresentação cartesiana;
- ✓ Relacionam-no com uma região limitada (como no desenho elaborado), não considerando a sua infinitude em detrimento de uma busca por explicitar uma possibilidade de medição;
- ✓ explicitam sua diferenciação com a reta, considerando que o plano é formado por pontos, mas são diferentes as formas como podem estar dispostos em relação à reta (destaque para a ausência da colinearidade);
- ✓ indicam uma condição de existência suficiente para obter o plano, sem contudo dizer o que ele é (por três pontos não colineares passa um único plano);
- ✓ relacionam-no com um espaço (região) ou um espaço dentro de outro;
- ✓ o caracterizam-no por meio de situações cotidianas que são trazidas para que seja possível elaborar imagens mentais que tragam a ideia associada ao plano; e
- ✓ explicitam a impossibilidade de explica-lo.

ESPAÇO

O espaço é caracterizado:

- ✓ pela possibilidade de conter, de ser ocupado, de possuir, ou mesmo de não possuir nada, ser um vazio;
- ✓ em termos daquilo que o compõe, mais especificamente de pontos, retas, objetos;
- ✓ pela possibilidade de possuir, conter entes, mas esses próprios entes são parte da sua constituição (é um continente);
- ✓ pela sua possibilidade de se estender, ser algo amplo;
- ✓ como um intervalo mensurável (algo limitado, uma brecha, o espaçamento entre dois elementos que o produzem, como duas retas paralelas);
- ✓ como possibilidade vivenciada, uma vez que o ser humano está nele, em sua condição da existência;
- ✓ como possibilidade de ser objeto de análise da Matemática e de estudo de suas propriedades; e

- ✓ *pela associação com o lugar onde nos localizamos ao estudar certas propriedades geométricas.*

As respostas revelam diferentes perfis pelos quais os termos indagados podem se doar na expressão das compreensões, indicando a possibilidade de um trabalho pedagógico focado na articulação entre esses modos de doação e aberturas intersubjetivas. As ideias apresentadas pelos alunos revelaram convergências para as compreensões possíveis, auxiliando a elaboração e o desenvolvimento das atividades do curso de extensão, no qual foram abordados, sempre que possível, questionamentos sobre esses e outros conceitos que poderiam disparar discussões ou análises sobre as compreensões expostas pelos alunos, como em situações-problema que permitissem identificar ideias presentes de modo formalizado ou não, ou que pudessem reativar conceitos já trabalhados em outras situações, desdobrando (re)elaborações possíveis.

Assim, o curso de extensão foi delineado numa retomada: da trajetória da pesquisadora como docente, das explicações orais e escritas apresentadas pelos alunos, das expressões de suas dúvidas, suas compreensões e seus questionamentos, dos livros-texto relacionados, das propostas sugeridas em *sites*, artigos e teses e das compreensões expostas pelos alunos ao serem indagados sobre os entes geométricos. Essa retomada buscou identificar possibilidades para que as atividades elaboradas para os encontros se colocassem como disparadoras de diálogos e trocas.

Os assuntos que seriam abordados em cada encontro foram estabelecidos com base em temas que se revelaram importantes durante o processo de elaboração. Por exemplo, o tema *distância* mostrou-se importante disparador de intuições e discussões coletivas ao indagarmos sobre o espaço e os objetos, por estar presente no dia-a-dia e em diferentes ações cotidianas. E mesmo não enfatizando a aplicação de fórmulas de cálculo de distâncias, como aquelas focadas na Geometria Analítica, o tema mostrou-se profícuo pelas possibilidades de reflexão diante do sentido do termo e da análise dos modos de proceder para calculá-la.

Diversos conceitos geométricos foram abordados e perpassaram vários encontros, e foram destacados sempre que necessário, mesmo quando o foco principal das atividades fosse outro. Além disso, a opção por deixar as atividades fluírem mais livremente, não se apegando à rigidez de um cronograma a ser cumprido linearmente, solicitou, em muitos casos, que as atividades propostas para um determinado encontro fossem adiadas para que fosse possível adentrar por esses temas que se revelaram importantes diante das dúvidas dos alunos, dos

questionamentos, ou mesmo por proposta da pesquisadora, a fim de dar continuidade à discussão iniciada.

Nesse sentido, em vez de enumerar os encontros na ordem cronológica pela qual foram planejados inicialmente, foram destacados os grandes temas abordados ao longo do curso, sejam aqueles focados durante a sua elaboração ou os que emergiram no seu decorrer, pela necessidade notada pela pesquisadora ou pelo interesse dos próprios alunos.

Esses grandes temas foram assim intitulados:

- **Elementos no espaço: expressões do corpo-próprio expondo a compreensão**

O tratamento desse tema objetivou a compreensão das posições relativas de elementos no espaço, a partir da criação de um cenário com a representação de um sistema de coordenadas no qual os alunos apresentariam situações propostas envolvendo pontos, retas e planos.

- **Representando e organizando o espaço**

Visou à discussão sobre os sistemas de coordenadas, o uso de algumas convenções e sua representação, buscando discutir aspectos como: sentido, localização, representação no plano, perspectivas etc.

- **Posições relativas: analisando situações**

Por meio de questionamentos, e com o uso de materiais como tiras e pequenos círculos feitos em e.v.a, folhas e pedaços retangulares de isopor etc., visou a discussão de relações entre certos elementos, buscando analisar representações no espaço, posições relativas e decorrências possíveis.

- **Melhor distância: o caso da formiguinha**

Foi trabalhado o conceito de distância no espaço tridimensional, por meio de problemas como o da formiga na face de um cubo que tem de chegar a outro ponto dessa face. Buscou-se destacar a análise dos elementos envolvidos no cálculo da distância, em situações cotidianas, bem como o sentido da expressão “melhor distância”.

- **Distâncias entre planos e retas: discutindo possibilidades de medição**

Foram propostas atividades que visavam à determinação de distâncias, buscando refletir sobre modos de proceder ao calculá-las, a partir das informações disponíveis e sem a aplicação de fórmulas.

Esses foram os grandes temas abordados nos encontros. Não são temas tomados de modo isolado, como itens pontuais, mas como noções se atrelando às atividades

desenvolvidas, de maneira a possibilitar compreensões mais abrangentes, retomadas de ideias, análise das discussões, frente à intencionalidade dos sujeitos quanto ao proposto.

Ao lançar luz aos encontros durante a realização do curso, voltamo-nos para a análise da *gênese* dos processos intencionais pelos quais certas objetualidades, nesse caso as ideias geométricas abordadas no curso de extensão, se dão à consciência intencional dos sujeitos, focando os processos de intuição, que já trazem compreensões primeiras, e avançando na compreensão das atividades propostas e das manifestações intersujeitos.

É importante destacar que a busca pelos indícios da evidência geométrica não se refere à busca de aplicabilidade das ideias geométricas, nem ao seu “extremo oposto” concernente ao seu caráter axiomático. Essa busca refere-se à reativação das ideias originais evidentes aos conceitos tratados em determinada atividade e que possibilitem a discussão e o registro das compreensões expressas por um aluno, ou grupo de alunos, ao voltar-se para o que foi proposto. O uso de aspas no termo “extremo oposto” é para ressaltar que, apesar de a aplicabilidade e a axiomatização da Matemática serem, muitas vezes, tratadas como formas contrárias de abordar essa ciência, tal dicotomia não é assim concebida fenomenologicamente: no solo subjetivo, a atividade compreensiva se constitui nos perfis ou nas perspectivas pelas quais os objetos se doam nas vivências intencionais do indivíduo e a produção do conhecimento sobre determinado assunto solicita o sentido percebido em diferentes percepções nas diversas vivências, permitindo a reelaboração dos conceitos, em que cada direcionamento traz aspectos que se complementam, entrelaçando compreensões de ideias, em seus diferentes modos de aparecer ou de se doar.

3.3 Procedimentos de Descrição e Análise: a movimentação em torno dos dados

Os encontros do curso de extensão foram filmados e transcritos, transformando-se em texto propositalmente organizado, tendo como fundo a interrogação formulada. A transcrição buscou explicitar não apenas as falas surgidas, mas também gestos, expressões, manifestações de dúvidas e certezas, silêncios significativos, modos de proceder junto ao co-sujeito, verbalizações simultâneas, e demais aspectos da complexidade dos encontros que a transcrição exclusivamente da expressão oral poderia omitir ou deixar em aberto.

Diante das transcrições, iniciamos o primeiro momento da análise fenomenológica, a *análise ideográfica*, na qual o pesquisador se volta para aspectos pontuais e singulares que se destacam ao atentar para o estudo de campo. Buscam-se pelos aspectos importantes que

emergem da vivência do fenômeno e que se constituem em polos de análise, cujo sentido se mostra significativo diante da complexidade da situação vivida.

A interrogação orienta as articulações produzidas pelo pesquisador ao voltar-se para o estudo de campo (ou para a transcrição dele), agora em uma atitude indagadora, interrogando características particulares daquela experiência, colocando em destaque passagens que se mostram em sintonia com a pergunta diretriz, em face à interpretação do ocorrido junto aos sujeitos da pesquisa.

Nesse momento do estudo, buscamos elaborar uma descrição dos encontros, com base nas transcrições, que dê conta de apresentar o que se mostrou significativo diante do focado. A dinâmica estabelecida nos encontros e a complexidade do interrogado explicitaram a impossibilidade de identificar esses aspectos significativos em recortes isolados das falas dos sujeitos. Vislumbramos, então, a possibilidade de organizar a descrição dos trechos que se ressaltaram, ao olhar da pesquisadora, como importantes para a compreensão do fenômeno por meio de *cenias significativas* (DETONI & PAULO, 2000; 2011).

As *cenias*, na abordagem de pesquisa fenomenológica, são recortes mais amplos das unidades de discurso da transcrição, que amarram vários significados em seu movimento, permitindo “que nos exercitemos na percepção de várias dimensões de que seu próprio texto não dá conta” (DETONI & PAULO, 2010) ²³.

Nos encontros, cada cena se constitui pela totalidade do sentido a que ela nos remete, em sua continuidade que permite compreender seu desenvolvimento e desfecho. Mas no próprio enredamento da cena podemos destacar os sentidos a que elas remetem e que se referem à possibilidade da produção em geometria. São as *unidades significativas* correlatas às cenias. Estas unidades são explicitadas ao nos voltarmos atentamente para cada cena, buscando indícios quanto ao investigado, em uma retomada dos encontros, agora em uma atitude perspectivada pela indagação posta.

Após serem destacadas as *unidades* de cada cena, passamos para o segundo momento da análise fenomenológica: a análise nomotética²⁴. *Nomos* significa uso de leis, e *Nomotético* refere-se à elaboração de leis ou princípios gerais originados do conhecimento de fatos anteriores referentes ao fenômeno em foco. Essas leis ou princípios referem-se aos estruturantes da experiência vivida do fenômeno focado.

²³ No capítulo seguinte retomaremos a discussão sobre as cenias significativas como modo de organização dos dados da pesquisa fenomenológica, esclarecendo possíveis interpretações equivocadas diante do significado do termo *cenias*.

²⁴ No capítulo seguinte a análise nomotética será retomada, de modo mais detalhado.

Nessa etapa, em que o pesquisador se debruça sobre os aspectos ressaltados da descrição, buscamos efetuar transcendências dos individuais, ou seja, de cada cena ou unidade individualmente considerada, em direção aos invariantes do fenômeno que revelam a estrutura mais geral da experiência vivida. Realizando a redução, efetuamos convergências que direcionam para os aspectos que permitem uma compreensão global do fenômeno diante do interrogado.

A redução fenomenológica é um movimento de idas e vindas em torno da compreensão dos dados, em uma atitude reflexiva do pesquisador, em uma constante retomada da descrição do fenômeno e das unidades significativas mais gerais ressaltadas na análise ideográfica. Assim, a fim de esclarecer o movimento realizado em busca dos invariantes do fenômeno, as *cenas* e unidades foram enumeradas, para que possam ser identificadas ao longo das análises efetuadas, possibilitando a retomada do sentido descortinado e das interpretações realizadas por nós, na medida em que são efetuadas articulações de significados das diversas cenas no movimento de realizar convergências.

No próximo capítulo, expomos, de modo detalhado, as compreensões e articulações efetuadas e as perspectivas pelas quais o fenômeno *do ensino e aprendizagem da Geometria assumida nos aspectos de sua produção se dá* e se presentifica no decorrer do curso de extensão anunciado, avançando em direção à articulação do sentido revelado na experiência vivida, buscando realizar um salto em termos de teorizações possíveis em face do indagado neste estudo.

CAPÍTULO QUARTO DESCREVENDO, ANALISANDO AS DESCRIÇÕES E BUSCANDO TRANSCENDÊNCIAS

4.1 Organização do Cenário

Visando o interrogado, construímos o *cenário* no qual os alunos e pesquisadora, atentos ao focado, se propuseram a realizar um curso de extensão que tem como pano de fundo a Geometria, o espaço, os entes geométricos e relações entre eles. Objetivou-se nesse cenário compreender o movimento de ensino e de aprendizagem aí ocorrido.

Cenário é uma maneira de dizer do todo que motiva a atividade. Percebe-se que os sujeitos numa situação em que nunca estão em atitude predicativa falam, ou se expressam, como se movendo num todo. Esse todo é aberto: ao outro, aos pré-conhecimentos do mundo cultural de cada um, a todas as experiências passadas que se retomam, e, qual um fluido em gás, aberto como *abertura*, como propensão, na chegada do outro e suas ofertas de significados autênticos compreendidos como coerentemente possíveis nesse todo. (DETONI & PAULO, 2011, p. 107)

O cenário do curso em destaque foi estruturado para que fosse possível lançar luz sobre o fenômeno interrogado, visando compreendê-lo em sua manifestação. Nele, os sujeitos estão voltados para atividades de ensino, compondo uma coletividade que transcende as ações individuais, na direção de uma construção intersubjetiva. Essa construção se refere à explicitação do compreendido junto ao disponibilizado, como materiais e atividades propostas. A compreensão da totalidade desse processo de construção exige que se trabalhe a significação dos termos linguísticos, os atos intuitivos expressos nas diferentes linguagens, por exemplo, gestos e movimentação do corpo-próprio, processos dedutivos surgidos, atos cognitivos manifestados etc., e, ao tomar sua descrição como os dados construídos, analisá-los e interpretá-los, articulando convergências de seus modos de darem-se.

Almejamos nesse momento, expor como a produção do conhecimento geométrico foi se mostrando nos encaminhamentos dos encontros, tendo em vista dar conta de abarcar seus momentos significativos.

No cenário do curso, os sujeitos se articulam no todo coeso da realização das atividades desenvolvidas, que revelam aspectos da intencionalidade presentificadas, suas compreensões e suas articulações. É certo que a totalidade de intenções, intuições, modos de os sujeitos voltarem-se para as atividades, as evidências havidas e respectivas expressões linguísticas verbalizadas formam uma complexidade que escapa à possibilidade de

compreensão plena de seus aspectos. Mesmo diante dessa constatação, focamos o cenário do curso, entendendo-o como o local onde se desenrolam *cenas significativas*, ou seja, conjuntos de movimentos com duração temporal mantida pela disponibilidade dos sujeitos de darem conta de uma ou várias atividades propostas, ao modo de *todos* amarrados pela intencionalidade dos *atores* – alunos e pesquisadora – direcionados ao tema trabalhado, denotando uma cocompreensão orgânica intersujeitos.

Na organização dos dados da pesquisa em *cenas*, não entendemos nem adotamos o termo no seu sentido tradicional dentro da dramaturgia: os *atores* da pesquisa não são sujeitos representando situações previamente vislumbradas por um autor que estabelece a priori tais *cenas*. Como esclarecem Detoni & Paulo (2011), nas “pesquisas qualitativas de base fenomenológica nas quais se trabalha no pré-reflexivo, isto é, nas quais as manifestações são livres de predicções, os sujeitos não estão representando como atores que se guiam por indicações textuais”. Eles explicam ainda que, da perspectiva da análise fenomenológica, a cena se constitui em torno de um motivo, na doação de significados pela ação do corpo-próprio, e o ator, ou sujeito, não é posterior à cena, ele incorpora e expressa significados ao estar com os outros.

Na cena, pode-se

(...) ver uma *idéia* sendo própria a uma série de manifestações convergentes para ela [...] Além de ver estas manifestações em cada sujeito, há uma atribuição comum de significados que o grupo todo de sujeitos intencionados na experiência deixa ressaltar na iminência do intersubjetivo. Cada sujeito articula compreensões que necessitam ser comunicadas *ao outro*. Há, portanto, sempre a experiência da alteridade, que se expressa numa rede comum de significados constituídos. (DETONI & PAULO, 2011, p. 109)

A cena, portanto, não é um fragmento retirado de modo aleatório das transcrições. Ela se constitui e é explicitada na medida em que revela um todo de sentido dado em suas perspectivas possíveis, desvelando o nexos entre as diversas falas, manifestações e ações ocorridas.

Ao organizar os dados em *cenas*, buscamos elaborar uma descrição textual que dê conta de abarcar e explicitar tudo o que, em nossa visão, se revelou como abertura de compreensões em Geometria, visualizado na complexidade do ambiente dos encontros do curso de extensão, no emaranhado das intencionalidades e expressões que se doam. Assim, as *cenas* se constituem e se desenrolam em torno de tema gerador, sendo, portanto, imprescindível que seja apresentada em sua totalidade a fim de possibilitar que se compreenda o desenvolvimento das ações e seu desfecho, em sua continuidade exigida.

Mas em cada cena, ao considerar os aspectos significativos que a compõem, ao atentar de modo mais focado às interpretações dos diálogos, dos gestos e de outras manifestações frente ao assunto abordado, destacam-se *unidades significativas* que se apresentam como totalidades de sentido que compõem a cena. Essas unidades são destacadas nas cenas por apresentarem evidências, ou pistas, quanto à constituição do conhecimento geométrico, no ambiente dos encontros junto aos sujeitos envolvidos.

Neste estudo, diante do interrogado, destacaram-se dois tipos de unidades significativas: aquelas relacionadas ao modo de proceder na apresentação de compreensões e interpretações na troca dos entendimentos havidos, às dificuldades advindas das questões propostas, à constituição da intersubjetividade etc.; e outra referente às manifestações *pré-predicativas* que direcionam para a compreensão de ideias e conceitos geométricos particulares, como plano, ângulo, perpendicular etc. Considerando o focado nos encontros e diante da questão diretriz, ambas se revelaram imprescindíveis para a compreensão da construção de conhecimento em geometria ocorrido.

Para destacar essas unidades na descrição das cenas, a primeira será denotada por *unidade de significado (US)* e a segunda, *unidade de significado para o conceito geométrico (USG)*. A fim de explicitá-las em termos dos significados a que direcionam, são apresentadas como asserções elaboradas pela pesquisadora, buscando dar conta de reunir o sentido revelado ao nos atentarmos para a cena.

Almejando destacar os aspectos que se realizaram ao olhar da pesquisadora, revelando-se como importantes face ao questionado, as descrições das cenas serão apresentadas em quadros assim estruturados: cada quadro se refere a uma cena significativa e é composto de duas colunas, em que a primeira se refere à descrição da cena e a segunda explicita as asserções elaboradas quanto às unidades de significado para o conceito geométrico (USG) que são destacadas ao longo da cena (Figura.1); na linha subsequente a cada unidade significativa da cena apresentamos a asserção articulada pela pesquisadora referente a essa unidade de significado correlata àquela cena.

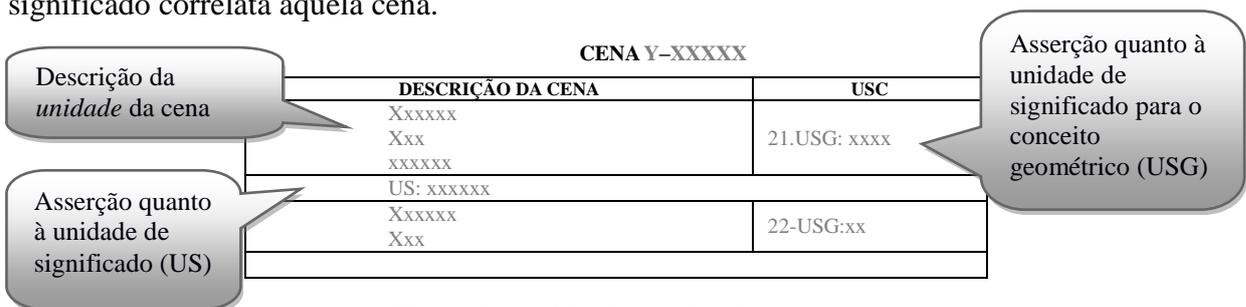
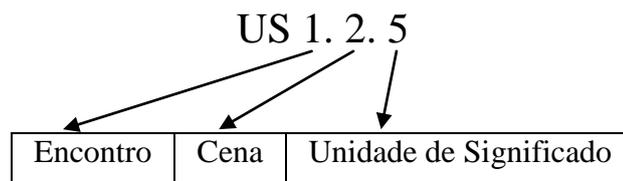


Figura 1: modelo do quadro das cenas

Para auxiliar na compreensão do movimento de redução efetuado e que será exposto a seguir, cada encontro e cada cena serão identificados por uma numeração sequencial. As unidades de significado (US) correlatas a uma cena serão identificadas por um código numérico formado por três números: o primeiro se refere ao encontro em que a unidade é destacada, o segundo à cena e o terceiro à unidade de significado, propriamente dita. Assim, US 1.2.5 se refere à unidade de significado 5 que se encontra na cena 2 do encontro 1.



As unidades de significado para o conceito geométrico (USG) serão identificadas por uma numeração sequencial acompanhada do nome do conceito geométrico relacionado e da asserção elaborada. Ao longo da descrição das cenas são destacados os trechos das falas e as manifestações dos sujeitos relacionadas às USG, os quais, em nosso entender, revelam-se como aberturas para a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos. Buscamos, assim, não ofuscar o sentido constituído na dinâmica do momento, o que poderia ocorrer caso as manifestações dos sujeitos e as unidades fossem analisadas fora do contexto da situação descrita.

Ainda buscando contextualizar o leitor quanto ao ocorrido, antes da apresentação dos quadros com as cenas significativas de cada encontro, há uma breve síntese do encontro, de seus objetivos e de seu desenvolvimento.

Sempre que necessário, buscamos ilustrar a descrição com imagens retiradas do registro filmado, a fim de facilitar a compreensão do ocorrido na cena. Porém, em alguns casos, a filmagem não deu conta de fornecer uma boa imagem, ou simplesmente não focou o desejado. Para superar essa limitação, quando necessário há um esboço para auxiliar na explicação do acontecido na cena. A intenção é iluminar a interação ocorrida destacando momentos que se mostraram significativos.

Quanto à realização dos encontros, a própria formatação do curso deu margem para muitas ocorrências que não foram antevistas em sua elaboração, como é passível de ocorrer no desdobramento de qualquer projeto. A imprevisibilidade das interações e a possibilidade aberta para o diálogo que o cenário possibilitou resultaram em diversos momentos de improvisação. Privilegiamos dar destaque aos questionamentos e às intuições que pudessem

fomentar a coparticipação de compreensões, e esses momentos se mostraram comuns, à medida que o entrosamento empático se fortalecia.

Se essa abertura possibilitou momentos significativos, por outro lado algumas improvisações poderiam ser mais bem exploradas, não fossem as limitações que o próprio momento do improviso impõe e as surpresas que pode acarretar.

Pelo fato de a pesquisadora está com os alunos e se colocar como mais um co-sujeito nesse cenário, ela também reelabora suas compreensões diante das falas, dos gestos, das dúvidas e das conclusões ocorridas em um diálogo, redirecionando suas ações diante do que se propôs a apresentar aos alunos.

Contudo, acreditamos que isso não seja um aspecto que obscurece a busca pelo focado neste estudo, mas é algo que deve ser esclarecer e que se conectará às próprias análises efetuadas, já que a produção do conhecimento geométrico em situações de ensino e de aprendizagem se dá na dimensão do diálogo, da troca e das (re)elaborações.

O leitor que já atuou no ensino de alguns dos temas aqui apresentados poderá perceber que certos diálogos surgidos não são desconhecidos ou totalmente inéditos. Muitas situações aqui apresentadas podem ter sido ou poderão vir a ser vivenciadas por um professor em aulas abordando os temas focados, mesmo que em diferentes níveis de ensino. Portanto, qualquer semelhança não é mera coincidência! Ela diz do modo como estamos inseridos nesse grande cenário que é o mundo-vida da Educação, em situações de ensino e aprendizagem, em que a Geometria se apresenta em sua objetividade diante das possibilidades de diálogo, atos intencionais de compreensão do sentido percebido e (re)elaborações advindas.

Passemos às descrições, às cenas.

4.2 As Cenas Significativas

As cenas significativas emergem no contexto de sete encontros do curso²⁵, junto à professora-pesquisadora (que designaremos por PP) e os sujeitos²⁶:

Carmen

Olivia

Milson

Sandro

Caio

Ingrid

Elvis

Novaes

Claudio

Isis

*Ana*²⁷

Todos os encontros ocorreram em um laboratório de Ensino de Matemática, o que permitiu a realização de atividades em grupo, por causa da estrutura da sala com bancadas. Além disso, a disponibilidade de diversos materiais possibilitou a manifestações de entendimentos, exemplificações e questionamentos com base na observação e manipulação dos objetos expostos, direcionando a atenção dos sujeitos para diferentes análises.

Antes de iniciar a apresentação dos encontros e respectivas cenas, alguns esclarecimentos quanto à apresentação da descrição se mostram importantes.

Ao longo da descrição das cenas utilizamos o termo *representar* (e seus derivados) sempre que os sujeitos lançam mão dos recursos materiais à disposição para dizer de entes geométricos ou de disposições possíveis entre esses entes. Assim, nas descrições, *representar* tem o sentido de *desempenhar o papel de*²⁸ um ente ou *expor* determinadas situações entre eles. Optamos pelo termo *representar* por ser comum aos textos matemáticos.

Em algumas situações, frente ao sentido atribuído ao material manipulável utilizado,

²⁵Foram realizados oito encontros, porém o último, ocorrido em um laboratório de informática, não possibilitou o registro de cenas significativas para o foco neste estudo, já que, na maior parte do tempo, se restringiu à explicação do funcionamento das ferramentas do software utilizado, o Geogebra.

²⁶Nomes fictícios. Observe-se que nem todos os alunos participaram de todos os encontros, por motivos diversos.

²⁷ Monitora do curso.

²⁸ HOUAISS, A. VILLAR, M. de S.; FRANCO, F. M. M. Dicionário Houaiss da língua portuguesa. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

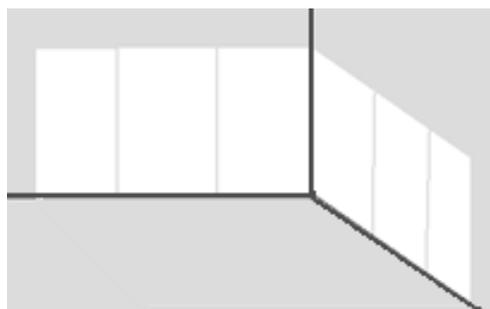
há um abuso de notação a fim de tornar a leitura da descrição menos cansativa. Assim, por exemplo, quando os sujeitos utilizam um palito referindo-se a uma reta, não escreveremos *a reta representada por um palito*, mas somente *a reta*. Da mesma forma, sempre que um objeto ou material for usado com a finalidade de *ser* um ente geométrico abstrato (apesar da impossibilidade de o ser), nos reportaremos ao próprio ente geométrico.

Por fazer parte da linguagem matemática, utilizamos o termo R^3 para dizer do espaço tridimensional e R^2 do plano bidimensional, destacando o modo como os termos são abordados nos livros-texto consultados. Não desconsideramos a possibilidade de se conceber um número diferente de dimensões para o espaço, nem de se adentrar por aspectos de geometrias não-euclidianas.

ENCONTRO 1

No primeiro encontro, buscamos criar um ambiente de encenação no qual os alunos seriam “retas” interagindo no cenário feito de isopor que representava um sistema de coordenadas tridimensional. A atividade foi proposta buscando disparar modos de sentir o sentido de reta e, também, para poder desdobrar, a partir dessa compreensão, diálogos esclarecedores sobre disposições de entes geométricos no espaço.

Com a ajuda de Ana, utilizamos placas de isopor para representar o sistema.



Com o uso de elástico, e em duplas, os alunos se colocaram como retas localizadas nesse sistema. No cenário, eles representaram situações que a professora-pesquisadora propôs a fim de discutir possibilidades de disposição no espaço.

CENA 1 – COMPREENDENDO O CENÁRIO

| DESCRIÇÃO DA CENA: “COMPREENDENDO O CENÁRIO” | USG |
|---|-----|
| Após as apresentações e esclarecimentos, iniciamos as atividades. | |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: “COMPREENDENDO O CENÁRIO”</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|---|
| <p>PP solicita que os alunos expliquem o que estão compreendendo sobre aquele ‘cenário’ montado. Inicialmente, nada foi nomeado por meio de notação matemática.</p> <p>SANDRO: já tem dois planos, horizontal e vertical, e tem o canto assim pra cima [aponta para a representação como se indicasse um segmento vertical ao plano do chão]</p> <p>PP: esse canto pra cima é o que?</p> <p>SANDRO: olha, tem um plano aqui, um eixo pra cá [risos]</p> <p>PP: já viu um eixo...</p> <p>SANDRO: um pra cá, outro pra lá e outro pra cima [gestos indicam como se fossem os eixos coordenados em um sistema de coordenadas tridimensional]</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. SISTEMA DE COORDENADAS: identificação de planos e cantos. 2. SISTEMA DE COORDENADAS: identificação de planos e eixos. 3. SISTEMA DE COORDENADAS: indicação da direção dos eixos. |
| <p>1.1.1 A expressão verbal se complementa aos gestos e revela aspectos da linguagem Matemática, na possibilidade de identificar planos e eixos coordenados. Denota o mundo-vida que habita e suas compreensões provenientes do processo de escolarização.</p> | |
| <p>PP: Esses planos, eles estão de qualquer jeito?</p> <p>Vários gesticulam com as mãos apontando o cenário, e expressando negação.</p> <p>CARMEM: tem seis... planos [e aponta para o cenário]</p> <p>PP: porque você falou seis planos? [pergunta, pois nota que era exatamente o número de placas de isopor usadas]. Você olhou para as placas?</p> <p>CARMEM: cada plaquinha, é! [risos]</p> | <ol style="list-style-type: none"> 4. PLANO: qualidade de um objeto plano. 5. PLANO: qualidade de um objeto plano. |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “COMPREENDENDO O CENÁRIO” | USG |
|--|---|
| <p>1.1.2 Indicação de um modo de compreender apoiado nas qualidades do material manipulável a disposição. A planitude do objeto lhe confere a qualidade de ser plano.</p> | |
| <p>PP: o plano, vocês pensam como algo infinito ou finito?</p> <p>Vários: infinito [gestos com as mãos complementam a ideia de infinitude do plano]</p> <p>PP: então poderia se estender, infinitamente... Poderia ir colocando (as placas) uma do lado do outra aqui?</p> <p>Vários: poderia [gestos positivos]</p> <p>PP: Posso pensar só no plano ou numa figura plana. ... Mas a palavra <i>plano</i> pode dizer de algo que é limitado ou ilimitado.</p> <p>Eles apenas concordaram, timidamente.</p> | <p>6. PLANO: infinitude indicada nos gestos. 7. INFINITO: gestos indicando infinitude</p> |
| <p>1.1.3 Os gestos indicam continuidade e infinitude quando os alunos atentam para o plano (substantivo) em sua qualidade de ser algo infinito.</p> | |
| <p>PP: algo mais chamou a atenção ou se destaca?</p> <p>OLIVIA [timidamente]: noventa graus?</p> <p>NILSON: perpendicularidade...</p> | <p>8. SISTEMA DE COORDENADAS: perpendicularidade entre elementos. 9. PERPENDICULARIDADE: ângulo reto. 10. SISTEMA DE COORDENADAS: perpendicularidade entre elementos.</p> |
| <p>1.1.4 Presença de aspectos da linguagem matemática escolar para uma ideia vivenciada cotidianamente, a de perpendicularidade.</p> | |
| <p>PP: imagine isso aumentando [indica como se colocasse isopor infinitamente], que nome poderia dar pra essa região? [indica uma das regiões delimitada pelos três planos (os dois de isopor e o chão). Com um gesto aponta a região na qual estão]. Essa região que engloba vocês.</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “COMPREENDENDO O CENÁRIO” | USG |
|--|---|
|  <p>OLIVIA: espaço...</p> <p>CARMEM: quadrante...</p> <p>Alguns fazem gestos positivos, outros revelam dúvida.</p> | <p>11. SISTEMA DE COORDENADAS: denominação da região delimitada</p> |
| <p>1.1.5 Convergência nas manifestações dos sujeitos, indicando distintas compreensões mas relacionadas entre si: o quadrante é o espaço onde se locomovem.</p> | |
| <p>PP: porque quadrante? (buscando explorar o entendimento da aluna)</p> <p>NILSON: continua infinitamente pra cá, e pra lá [gesticula apontando os eixos e o chão e conta a divisão do chão em quatro partes]</p> | <p>12. SISTEMA DE COORDENADAS: infinitude dos eixos</p> <p>13. INFINITO: gestos indicando infinitude</p> <p>14. SISTEMA DE COORDENADAS: determinação de quatro partes</p> |
| <p>1.1.6 Há Complementação da fala entre os sujeitos. Gestos e explicações indicam a divisão do espaço em quatro partes acima do chão, confirmando a utilização do termo quadrante.</p> | |
| <p>PP nota que desconsideraram o eixo vertical: mas vocês estão olhando só para esses dois [aponta os eixos x e y indicados no chão]?</p> <p>NILSON: e prolongando [gesticula prolongando os eixos indicados]</p> | <p>15. SISTEMA DE COORDENADAS: prolongamento dos eixos</p> |

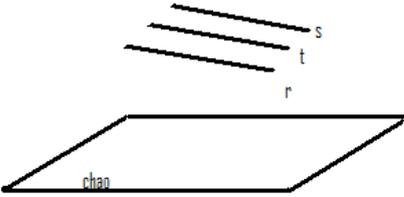
| DESCRIÇÃO DA CENA: “COMPREENDENDO O CENÁRIO” | USG |
|---|---|
| 1.1.7 Gestos indicam prolongamento e infinitude dos eixos. | |
| <p>PP: e se pensasse no outro? [aponta para o eixo vertical, atentando para os demais evidenciados pelos alunos]</p> <p>INGRID [expressa dúvida]: mas eu não entendi.. Por que quadrante?</p> <p>OLIVIA explica: eu visualizei assim... se fosse alongar pra lá e depois pra lá [indica o alongamento do eixo x e depois do y], dividiria em quatro partes [seu movimento aponta a divisão no cenário]. Quatro quadrantes, tá vendo.</p> <p>Vários concordam.</p> | <p>16. SISTEMA DE COORDENADAS: alongamento dos eixos</p> <p>17. SISTEMA DE COORDENADAS: modo como divide espaço</p> |
| 1.1.8 Busca explicar aos colegas a compreensão e o modo como divide o espaço, movendo-se no cenário, indicando, por meio de linguagem corporal, um alongamento indefinido dos eixos. | |
| <p>PP: Então vamos considerar mais um plano, o do chão. Será que quadrante ainda vale? Há um nome mais interessante?</p> <p>OLIVIA: área? [aponta para o chão]</p> | 18. PLANO: uma área. |
| 1.1.9 Destaque para a divisão do espaço do chão, o que remete à ideia de área descartando a espacialidade da sala e que o “chão” poderia ser um divisor do espaço. Revela compreensão apropriada, porém diversa daquela buscada. | |
| <p>PP: ok, mas pensem na divisão. Pensem que tem mais esse plano do chão [aponta para o chão]. Em quantas partes dividiu? [gestos apontando o chão e os pedaços de isopor]</p> <p>OLIVIA: pensando pra baixo... tem quatro... [indica como se contasse outras quatro partes abaixo do chão]</p> <p>PP: pensa assim, se eu pudesse ir pra baixo... Eu não poderia descer? Não ia ter um espaço aqui em baixo?</p> <p>CAIO: oito.</p> | 19. SISTEMA DE COORDENADAS: divisão do espaço em 8 partes |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: “COMPREENDENDO O CENÁRIO”</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|--|
| <p>PP: todos conseguem ver oito?</p> <p>Muitos ficam em dúvida.</p> <p>INGRID: Como assim? (manifestando dúvida na explicação)</p> <p>CAIO: Aqui dividiu em quatro e tem o chão... [gesticula] então vai ser duas aqui, duas aqui.... [continuação dos gestos de contagem] Oito.</p> <p>Olhares afirmativos e outros interrogativos.</p> <p>PP: Então eu vou ter quatro aqui e quatro pra baixo também... Então qual seria um nome bom pra parte que pega vocês?</p> <p>Pausa e algumas tentativas repetidas, mas o termo esperado por PP não surge.</p> <p>PP insiste, porem nenhum aluno faz uso do termo desejado por ela.</p> <p>PP desvela a palavra que almeja: Se quatro é quadrante, oito é... octante.</p> <p>PP compara o desenho de um sistema de duas coordenadas cartesianas e o cenário. Desenha na lousa um sistema xy e discute a situação plana em comparação com a espacial. Nota que os alunos voltam-se para a sua explicação.</p> <p>PP: Aqui nós temos uma situação...</p> <p>Vários: plana.</p> <p>PP: E aqui uma espacial [aponta o cenário e todos acompanham atentivamente, mas sem interferir, só gesticulando positivamente]</p> | <p>20. SISTEMA DE COORDENADAS: divisão do espaço em 8 partes</p> <p>21. SISTEMA DE COORDENADAS: organização do espaço.</p> |
| <p>1.1.10 Gestos complementam a contagem das divisões do espaço a partir do sistema de coordenadas que se amplia ao vislumbrarem o chão como mais um divisor. Há manifestação de evidência de compreensão e de dúvidas nas expressões dos alunos.</p> | |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: “COMPREENDENDO O CENÁRIO”</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|--|
| <p>PP: Pensando nisso, o que a gente tem no espaço? O que a gente pode dizer sobre ele? O que é que ele é? (busca explorar as compreensões dos alunos sobre espaço e seus elementos)</p> <p>NILSON: infinitos pontos, sei lá... aliás o plano é que é formado por infinitos pontos... (expressa dúvida)</p> <p>PP: e o espaço? Do que ele é formado?</p> <p>Silêncio prolongado e indicação de busca por respostas ao questionado</p> <p>SANDRO: o espaço pode ser vazio.</p> <p>[olhares interrogativos, inclusive o de PP]</p> <p>PP: aqui, por exemplo, podia ser vazio, mas poderia possuir umas partículas de poeira, pensando na física. Será que é possível ter um espaço vazio?</p> <p>SANDRO: um espaço perfeito...</p> <p>OLIVIA: um buraco negro...</p> | <p>22. ESPAÇO: constituído de infinitos pontos.</p> <p>23. ESPAÇO: dificuldade de explicação.</p> <p>24. PLANO: constituído de infinitos pontos.</p> <p>25. PONTO: elemento constituinte.</p> <p>26. ESPAÇO: possibilidade de ser vazio.</p> <p>27. ESPAÇO: possibilidade de ser perfeito.</p> <p>28. ESPAÇO: um buraco negro.</p> |
| <p>1.1.11</p> <p>Há conflito ao analisarem os elementos que compõem o espaço ou o plano. A manifestação das compreensões indicam possibilidades de se descrever o espaço pela ausência de elementos em seu interior, o que remete a algo “perfeito”, ou, convergindo para essa ideia, a um buraco negro, trazendo noções da física que são difundidas no cotidiano.</p> | |

CENA 2 – VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|---|
| <p>Cada aluno pega um papelzinho com uma letra minúscula (r, s e t). Então terá que encontrar seu par e cada dupla será uma reta no cenário, usando um pedaço de elástico. PP retoma os elementos indicados no sistema de coordenadas representados com isopor e os sentidos positivo e negativo dos “eixos”, explicando que a representação seria no primeiro octante, considerando o tamanho limitado da sala.</p> <p>PP: considerando os eixos positivos pra lá, pra lá e pra cima [gestos], qual seria o primeiro octante? (retoma a compreensão dos alunos quanto à ordenação dos octantes)</p> <p>Muitos apontam para aquele no qual estávamos situados, como sendo o primeiro octante.</p> <p>PP: E qual seria o segundo?</p> <p>Muitos olhares para o chão, movimentação pelo cenário e gestos com as mãos para contar. Giros com as mãos em torno de um eixo vertical imaginário.</p> <p>SANDRO: aqui seria o primeiro, aqui segundo [faz um gesto, no sentido anti-horário, indo do eixo x para o y, para determinar o segundo octante]. Aqui embaixo seria o quinto... [aponta para baixo do primeiro octante, indicando que o quinto estaria abaixo de onde estão]</p> <p>PP: por que? o que te levou a responder assim?</p> <p>CARMEM: sequencia [risos]</p> | <p>29. ESPAÇO: ocupação do primeiro octante.</p> <p>30. ESPAÇO: modos de proceder para ordenar os octantes.</p> <p>31. SISTEMA DE COORDENADAS: modo de organização.</p> |
| <p>1.2.12</p> <p>A movimentação do corpo-próprio explicita a organização para enumerar os octantes, indicando agir da forma como procede na contagem dos quadrantes do R2, por meio de giros anti-horários, numa sequência.</p> | |
| <p>PP retoma a atividade: vocês terão que representar retas no primeiro quadrante, usando o elástico.</p> <p>Os alunos realizam tentativas de segurar o barbante, manifestam dúvidas e acham a situação engraçada. Movimentam-se em sintonia com o colega, para assumirem-se como reta.</p> | |

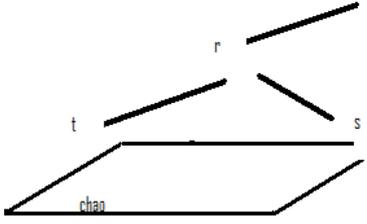
| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|--|
| <p>PP: cada dupla é uma reta. Uma sugestão é entrar no elástico... Se vocês formaram retas, e perguntassem a vocês o que vocês são, o que vocês fariam?</p> <p>SANDRO [risos]: um conjunto de pontos.</p> <p>INGRID: um ponto, eu acho que um ponto.</p> <p>Vários gestos positivos dos demais alunos</p> | <p>32. RETA: constituída de pontos.</p> <p>33. PONTO: elemento constituinte da reta</p> |
| <p>1.2.13 Movimentação do corpo-próprio, de modo que se assumem na condição de ponto, ou conjunto de pontos, que constituem a reta.</p> | |
| <p>PP: agora eu vou dar algumas instruções. Quero “<i>r</i> e <i>s</i> paralelas a <i>t</i>”</p> <p>Após esclarecerem sobre quais eram as retas, começaram a se movimentar pelo cenário.</p> <p><i>t</i> se posicionou paralela ao plano do chão. Então <i>r</i> e <i>s</i> ficaram paralelas a ela, ambas a uma mesma “altura” do chão, de forma que <i>t</i> ficou entre <i>r</i> e <i>s</i>.</p>  <p>Para manter o paralelismo, por meio de gestos, os alunos miram o olhar para a outra reta e para seu companheiro, movimentando-se para realizar as correções necessárias quando preciso, em sintonia com os colegas.</p> <p>PP: agora continua <i>r</i> e <i>s</i> paralelas a <i>t</i>, mas de outra forma não mais nessa disposição. Podem mexer o elástico, mexer vocês... (busca explorar possibilidades de novas disposições para a situação proposta)</p> <p>Silêncio e observação do espaço. Há movimentação e diálogo com os colegas buscando outros modos de disposição para atender ao solicitado.</p> | <p>34. PARALELISMO: destaque para o paralelismo com o chão.</p> <p>35. PARALELISMO: mirando o paralelismo.</p> |

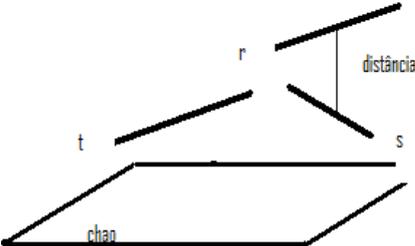
| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|---|
| <p>INGRID: só se trocar de posição. Eles veem pra cá e a gente vai pra lá [sugerindo inversão da posição das retas r e s, sendo que t continuaria entre elas e todas permaneceriam paralelas ao chão]</p> <p>SANDRO: ou se a gente ficar do lado deles assim [gesto indicando r e s de um mesmo lado relativamente a t]</p> <p>Diálogos e olhares afirmadores.</p> <p>PP: em todos esses casos eu olho daqui e já vejo que vocês estão todos...[gesticula indicando as retas a uma mesma altura do chão]</p> <p>OLIVIA complementa a fala de PP: estão nivelados (ri)</p> <p>PP faz gesto afirmativo para OLIVIA: fica plano. Se eu quisesse colocar um isopor sobre todas ia ficar plano.</p> | <p>36. PARALELISMO: destaque para o paralelismo com o chão.</p> <p>37. PLANO: nivelamento.</p> <p>38. PLANO: modos de manutenção do paralelismo</p> |
| <p>1.2.14</p> <p>Buscando pelo paralelismo das três retas, os alunos direcionam-se para uma posição mais “acertada”, ou seja, a uma mesma altura e paralelamente ao chão. O corpo-próprio atenta-se para a tarefa proposta em sintonia com os cossujeitos. O termo “nivelado” complementa o exposto, revelando sentido apropriado.</p> | |
| <p>PP: e teria algum jeito de não ficarem todas no mesmo plano? (busca explorar outras possibilidades de disposições para as retas)</p> <p>Os alunos ficam em silêncio e pensativos, expressando atentividade.</p> <p>SANDRO apresenta uma nova disposição para a sua reta (s): pode ser de baixo pra cima [gesticula com o elástico, eliminando o paralelismo com o chão]</p> <p>PP: como?</p> <p>OLIVIA: abaixa aí [ri e manifesta compreensão do sugerido por SANDRO, apontando para ele na outra extremidade de s] Com SANDRO em um nível mais baixo que OLIVIA, a reta s fica como que furando o plano do chão.</p> | <p>39. PARALELISMO: rompendo o paralelismo com o chão.</p> <p>40. PARALELISMO: rompendo o paralelismo com o chão.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|--|
| <p>t e r permaneceram em suas posições e, por isso, o paralelismo entre as três se perde.</p> <p>SANDRO pede aos colegas que façam o mesmo, ou seja, que inclinem a reta do mesmo modo que ele e OLIVIA, a fim de retomar o paralelismo: vocês também [solicitando que r e t se movessem para retomar o paralelismo]</p> <p>INGRID: mas eu não posso [pois pertence à reta t que, conforme o enunciado, deveria se colocar no cenário para que depois as duas outras retas pudessem posicionar-se paralelas a ela. INGRID se reconhece como a reta do enunciado, estática e referência para as demais]</p> <p>PP [buscando explorar a ideia de SANDRO sugere que t e r fiquem paralelas à reta s de SANDRO e OLIVIA]: então vamos mudar. Agora t e r tem que ficar paralelas a s.</p> <p>Movimento de abaixar e subir, gestos, falas como “mais um pouco”, “ainda não tá”, “isso”, risos. Ao final, as três retas estão paralelas entre si e não mais paralelas ao chão, porém continuam coplanares, ou “niveladas”</p> <p>PP destaca a conservação da coplanariedade das 3 retas: mas ainda dá pra colocar o isopor aí (ri)</p> <p>PP pede que pensem sobre a situação e segue para a próxima encenação.</p> | <p>41. PARALELISMO: modos de manutenção do paralelismo.</p> <p>42. RETA: referência estática.</p> <p>43. PARALELISMO: rompendo o paralelismo com o chão.</p> <p>44. PLANO: manutenção da coplanariedade.</p> |
| <p>1.2.15</p> <p>Indicam tentativas de sair da posição mais “acertada” e rompem com o paralelismo com o chão, porém mantendo a coplanariedade das três retas representadas na disposição dos alunos. Na atividade, a aluna assume-se como a reta do enunciado, em suas possibilidades.</p> | |
| <p>PP enuncia a próxima disposição para as retas: agora quero “r paralela ao chão, e s perpendicular ao chão”.</p> <p>PP [retoma a compreensão do termo]: o que é perpendicular?</p> <p>NILSON: 90 graus.</p> | <p>45. PERPENDICULARIDADE: ângulo reto.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|--|
| <p>Ficar dentro do elástico dificulta a disposição dos alunos (pois se criavam duas) então eles reorganizam a forma de representar. Eles seguram as extremidades de seus elásticos, não ficando mais dentro dele.</p> <p>Após r se dispôr paralela ao chão, s se coloca perpendicular ao chão e tocando em r:</p> <div data-bbox="448 566 810 741" style="text-align: center;"> </div> <p>PP: tem outra maneira?</p> <p>SANDRO: pode ser assim [e movimenta s, “desgrudando” de r, mantendo o perpendicularismo com o chão, como solicitado pelo enunciado]</p> <p>PP: a gente sabe que uma é paralela e a outra perpendicular ao chão. O que eu posso afirmar sobre as duas retas, uma em relação a outra?</p> <p>SANDRO: são concorrentes?</p> <p>PP: o que é concorrente? [retoma, pois da forma como estão, as retas não se tocam, ou seja, não são concorrentes na definição usual do termo, mas sim reversas]</p> <p>SANDRO indica o termo ‘concorrente’ para dizer da disposição das retas e esclarece a sua compreensão: direções opostas.</p> <p>NILSON, atentando ao exposto por SANDRO, complementa com a definição matemática do termo: quando encosta.</p> <p>Com um gesto, PP confirma.</p> <p>PP: mas matematicamente... como se diz quando não se encontram? Porque no plano ou (duas retas) se encontram, e são concorrentes, ou não, e são paralelas.</p> <p>[PP atenta para as possibilidades no plano e no espaço e destaca a nomenclatura usada em cada caso. Explica que no espaço há outra possibilidade e que o termo usado não é muito comum pra eles, e explica que são chamadas <i>retas reversas</i>]</p> | <p>46. RETA: destaque para intersecção entre as retas.</p> <p>47. RETA: movimento eliminando a intersecção entre as retas.</p> <p>48. RETA: possui direção.</p> <p>49. CONCORRÊNCIA: direções opostas.</p> <p>50. CONCORRÊNCIA: quando encosta</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|--|
| <p>1.2.16</p> <p>O termo <i>concorrente</i> destaca-se em seu sentido cotidiano já que as direções das retas indicam caminhos concorrentes, o que revela-se de certa forma mais apropriado que a definição matemática do termo, de ter ou não uma intersecção, ou de encostar, como lembra o coosujeito.</p> | |
| <p>PP [retoma a questão]: qual a relação entre elas (as retas)?</p> <p>PP solicita que fiquem novamente na primeira posição, como retas concorrentes e os alunos colocam-se na posição solicitada.</p>  <p>CAIO: tem 90 graus [aponta a intersecção, indicando um ângulo de 90° determinado na intersecção das retas]</p> <p>SANDRO: forma outro plano no caso, né? [olhando para a disposição das retas, visualiza a determinação de um plano composto pelas retas r e s]</p> <p>PP pede que SANDRO indique, usando uma folha de sulfite, o plano que vislumbrou.</p> <p>SANDRO dispõe a folha coplanar às retas tocando na intersecção entre elas.</p> | <p>51. ÂNGULO: destaque para o ângulo reto</p> <p>52. PLANO: visualização de um plano por duas retas que se interceptam.</p> <p>53. PLANO: indicação do plano determinado por duas retas que se interceptam.</p> |
| <p>1.2.17</p> <p>Ao focar na representação das duas retas, uma paralela e a outra perpendicular ao chão, há destaque para a evidência do ângulo de 90 graus e para a determinação de um plano (no caso particular em que as retas estão se interceptando). Os gestos e o material auxiliam a destacar a coplanariedade das retas.</p> | |
| <p>PP retoma a análise da relação entre as retas: 90 graus, porque posso afirmar isso?</p> | |

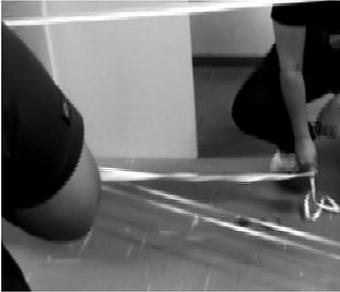
| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|---|
| <p>SANDRO: essa é paralela ao chão e essa é perpendicular, então aqui é 90 graus. [indica a posição das retas para concluir sua resposta]</p> <p>SANDRO explicita modos de justificar a conclusão com base no dado no enunciado e na obviedade da representação das retas. Então, PP atenta para a importância de uma justificativa Matemática que não se baseie apenas no que foi enunciado, nesse caso a posição entre as retas e o chão.</p> | <p>54. PERPENDICULARIDADE: perpendicularidade decorrente da disposição de elementos.</p> |
| <p>1.2.18 A própria configuração visual das retas na atividade já garante a legitimidade de uma afirmação e a validade da conclusão.</p> | |
| <p>PP: agora quero r, s e t paralelas ao plano do chão... Veja que eu não falei paralelas entre si [ressalta para que os alunos fiquem atentos às possibilidades de disposição, sendo essa situação diferente da primeira]</p> <p>SANDRO: pode ficar cada uma em uma altura?</p> <p>Na movimentação buscando atender à situação proposta, t e s ficam na mesma altura em relação ao chão, mas não paralelas entre si, portanto concorrentes; r fica paralela a t, mas em altura mais elevada em relação ao chão.</p>  <p>PP: o que podemos afirmar nesse caso?</p> <p>INGRID: t e s se interceptam [aponta para as duas retas]</p> <p>PP: e r e t?</p> <p>INGRID: não se interceptam porque se continuar lá na frente elas vão continuar paralelas [seus gestos indicam a continuidade das duas retas paralelas e a impossibilidade de intersecção]</p> | <p>55. RETA: disposição em relação ao “chão”</p> <p>56. PARALELISMO: impossibilidades de intersecção.</p> <p>57. RETA: continuidade indefinida.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|--|
| <p>1.2.19</p> <p>Indicação de busca por posições “menos acertadas” onde a sintonia dos sujeitos revela possibilidades de compreensão da disposição, a qual é expressa nos gestos indicando continuidade das retas e possibilidades de haver, ou não, intersecção.</p> | |
| <p>PP: E se eu perguntasse qual a distância entre r e s? [questiona a compreensão quanto à distância entre as duas retas reversas da representação dos alunos, s e r]</p> <p>NILSON gesticula apontando de r até s, indicando o menor segmento que une essas retas. Todos concordam</p>  <p>INGRID: porque é aqui que elas vão se interceptar [e desce a reta r, até que ela encoste em s, projetando ortogonalmente r em s. Nesse movimento, indica a distância apontada por NILSON complementando sua ação]</p> <p>PP busca abrir compreensões sobre distância: o que é distância pra vocês? Por exemplo, qual é a distância daqui a São Paulo?</p> <p>OLIVIA: menor distância?</p> <p>NOVAES: uns 800 km</p> <p>PP: poderia ser 1500? Alguém diria 1800?</p> <p>Os alunos fazem gestos afirmativos</p> <p>PP: e 100 km? Poderia ser?</p> <p>Vários: aí não</p> <p>PP pede que pensem no assunto, pois ele será retomado em outro encontro.</p> | <p>58. DISTÂNCIA: menor segmento ligando elementos.</p> <p>59. RETA: destaque para a interseção da projeção entre duas retas reversas.</p> <p>60. PROJEÇÃO: movimentação de retas reversas</p> <p>61. DISTÂNCIA: possibilidade de existir a menor distância.</p> <p>62. DISTÂNCIA: valor estimado.</p> <p>63. DISTÂNCIA: valor estimado em um intervalo ilimitado superiormente.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|---|---|
| <p>1.2.20</p> <p>Indicação de certeza ao propor a distância entre duas retas reversas, como sendo aquela que aparentava ser a menor. A movimentação do corpo próprio explicita o compreendido por meio de uma projeção. A distância entre duas cidades é apontada como um valor passível de variação, ilimitado superiormente, dado pelas circunstâncias reais.</p> | |
| <p>PP dá continuidade: mais uma posição, s e t paralelas ao plano do chão e r ficará perpendicular a ambas.</p> <p>Inicialmente, s e t ficam paralelas ao chão, em alturas diferentes e não paralelas entre si, portanto não se tocam (são reversas)</p> <p>Antes de r colocar-se perpendicularmente, PP busca dialogar com os alunos sobre o termo “retas coplanares”. Pede que um aluno indique se duas retas concorrentes são ou não coplanares, usando um isopor.</p> <p>SANDRO dispõe o isopor (plano) sob os elásticos (retas).</p> <p>Gestos confirmativos dos colegas apoiam a ação.</p>  <p>PP retoma a situação inicial, na qual s e t se dispuseram como retas reversas.</p>  <p>PP: agora nessas duas retas [aponta s e t, reversas]. Existe um plano que contém as duas?</p> | <p>64. PLANO: indicação do plano por duas retas que se interceptam.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|--|
| <p>SANDRO: o piso, o chão é. (aponta para o chão apesar de ambas as retas estarem acima dele, não sendo portanto coplanares ao chão. PP considera que ele esta se referindo ao paralelismo das retas com o chão, talvez numa retomada da situação anterior em que uma aluna projeta as retas: da mesma forma, as projeções das retas no chão seriam coplanares a ele)</p> <p>Alguns discordam.</p> <p>PP: no termo coplanar, <i>co</i> tem o sentido de estar junto, tem que estar junto no mesmo plano..</p> <p>NOVAES complementa a fala de PP: um precisa do outro...</p> <p>Os alunos buscam dispor o isopor como um plano que contém as duas retas reversas. Depois de muitas investigações com os materiais, buscando pelo plano coplanar a ambas, concluem que não existe tal plano e portanto as retas não são coplanares.</p> | <p>65. PLANO: o chão como base para retas paralelas a ele.</p> <p>66. PROJEÇÃO: movimento de projeção até o chão</p> <p>67. PLANO: necessidade reciproca dos elementos envolvidos.</p> <p>68. PLANO: impossibilidade de um plano conter duas retas reversas.</p> |
| <p>1.2.21 Atribuição conjunta de significado para o termo coplanar e o sufixo <i>co</i> ganha o sentido de <i>precisar do outro</i>. Há uma associação do termo coplanar ao paralelismo das retas com o chão. O material concreto indica aberturas de compreensão e interpretação conjunta para o termo.</p> | |
| <p>PP retoma a situação proposta: agora <i>r</i> perpendicular a ambas, ou ortogonal às duas.</p> <p>De imediato os alunos se colocam na posição, sendo que <i>r</i> fica perpendicular e tocando as duas outras retas.</p>  | <p>69. RETA: destaque para intersecção entre as retas</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|--|
| <p>PP: o que posso afirmar sobre r em relação ao plano do chão?</p> <p>Vários: perpendicular. (revelam certeza)</p> <p>PP: a reta (r) poderia estar em outro lugar do espaço e ainda assim ser perpendicular? Tocar as duas?</p> <p>r se movimenta, buscando outras possibilidades.</p> <p>NOVAES: Poderia esticar essa e essa [aponta para as retas s e t, como que estendendo infinitamente], mas elas não iriam se encontrar nunca.</p> <p>NOVAES indica a possibilidade da reta r (a reta solicitada) se afastar das outras duas, mantendo-se ortogonal a elas (s e t). Os alunos revelam clareza quanto à constatação do percebido por NOVAES, então a reta r se afasta, em apoio à ideia de NOVAES.</p> <p>PP: o que eu posso afirmar sobre essa reta e a anterior? [referindo-se a r antes e depois da movimentação]</p> <p>INGRID: são paralelas</p> <p>Gestos afirmativos</p> | <p>70. PERPENDICULARIDADE: perpendicularidade decorrente da disposição de outros elementos.</p> <p>71. RETA: continuidade indefinida.</p> <p>72. RETA: retas reversas não se encontram</p> <p>73. RETA: movimento eliminando a intersecção entre as retas</p> <p>74. PARALELISMO: constatação de paralelismo entre as soluções possíveis</p> |
| <p>1.2.22 Manifestação do corpo próprio buscando a ortogonalidade desejada, o que, inicialmente, se dá com a intersecção com as retas, para então vislumbrarem outras possibilidades, com destaque para a identidade de serem todas paralelas entre si.</p> | |
| <p>PP: existiria um jeito de r ser perpendicular às duas e não ser paralela a essas (soluções encontradas)? (referindo-se às retas ortogonais a s e t)</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|---|
| <p>OLIVIA e CARMEM, que compõem a reta r, se movimentam buscando pela possibilidade de outra solução. Prontamente r se move, ficando paralela ao chão, numa tentativa de encontrar tal situação. Por meio de um rotacionamento, busca ficar ortogonal a uma das retas, mas perde a ortogonalidade com a outra. Olhares atentos acompanham e alguns se manifestam com gestos negativos.</p>  <p>Vários constataam a impossibilidade de uma nova disposição para a reta r que não seja paralela às soluções anteriores.</p> <p>PP [restringe a situação para auxiliar na conclusão da situação anterior]: E para que r fique perpendicular a apenas essa (aponta para s). Quantas têm?</p> | |
| <p>As alunas se movimentam para que r fique perpendicular à s. s está paralela ao chão, então r se dispõe perpendicular a s e também paralela ao chão.</p>  <p>PP: quantas existem?</p> | <p>75. PARALELISMO: destaque para o paralelismo com o chão</p> |
| <p>Vários: infinitas [movimentam t, que “anda” sobre s, mantendo sempre a perpendicularidade entre elas, num movimento paralelo ao chão, ou seja, transladam a reta horizontalmente. A movimentação indica a possibilidade de infinitas soluções, paralelas entre si e ao chão]</p> | <p>76. PARALELISMO: destaque para o paralelismo com o chão</p> <p>77. PARALELISMO: constatação de paralelismo entre as soluções possíveis</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|---|
| <p>PP: sem ser andando paralelamente sobre s, teria outra perpendicular?</p> <p>Gestos de alguns alunos indicam negação</p> <p>INGRID atenta-se para a situação discussão anterior na qual r era ortogonal a ambas.</p> <p>INGRID: na vertical.</p> <p>A aluna contempla de imediato um novo posicionamento para r e é confirmada pelos demais.</p> <p>PP: precisa ser vertical?</p> <p>Em um gesto objetivo, OLIVIA movimentou t, inclinando-a, formando 90 graus com s, mas agora obliquamente ao plano do chão.</p> <p>SANDRO manifesta compreensão: pode ter várias inclinações.</p> <p>Gestos confirmadores dos demais alunos.</p> <p>ELVIS complementa: desde que tenha 90 graus.</p> <p>PP indica outras posições a partir da que OLIVIA indicou. Usa um isopor perpendicular a s no ponto de intersecção com t para indicar as infinitas possibilidades contidas no plano indicado pelo isopor</p> <p>PP: quantas retas existem aqui nesse plano?</p> | <p>78. PARALELISMO: rompendo o paralelismo com o chão.</p> <p>79. PERPENDICULARIDADE: destaque para reta vertical ao chão</p> <p>80. PARALELISMO: rompendo o paralelismo com o chão.</p> <p>81. PERPENDICULARIDADE: rompendo a perpendicularidade com o chão</p> <p>82. PERPENDICULARIDADE: identificação de infinitas retas perpendiculares à outra reta</p> <p>83. RETA: possui inclinação</p> <p>84. PERPENDICULARIDADE: ângulo reto</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|---|--|
| <p>Vários: infinitas.</p> <p>PP [confirmando]: uma delas é a que você fez, a inclinadinha aí.</p> <p>A explicação motiva risos.</p> | |
| <p>1.2.23</p> <p>Movimentação do corpo-próprio buscando possibilidades de instalarem-se conforme solicitado. Diante da restrição da condição de ortogonalidade a apenas uma das retas, inicialmente as soluções apresentadas são aquelas mais triviais, ou seja, são aquelas paralelas ao chão. Mas a atitude intenciona posições menos convencionais, indicando novas possibilidades, inclusive a discutida anteriormente, que foi abolida das possibilidades, bem como aquela manifestada na inclinação do corpo-próprio da aluna.</p> | |
| <p>PP: retomando a questão de encontrar uma reta que forme 90 graus com as duas? Sem ser as que a gente já fez. Estão lembrando as que a gente fez né?</p> <p>Gestos afirmativos</p> <p>Os alunos se movimentam: r se move buscando encontrar outra disposição. Mantém uma extremidade encostada em t e a outra se afastando de s. PP pede que analisem se continua 90° em relação a t e muitos gesticulam negativamente.</p> <p>Consideram que não há outra possibilidade para a situação senão as soluções paralelas entre si.</p> <p>PP: não há como, mas as três (retas) que encontramos são paralelas entre si... Existem só esses três?</p> <p>Em coro os alunos respondem: não! Infinitas.</p> | <p>85. PERPENDICULARIDADE: visualização de disposição não perpendicular.</p> <p>86. INFINITO: quantidade de soluções para certo problema</p> |
| <p>1.2.24</p> <p>Foco na ortogonalidade de uma reta em relação às outras duas reversas, o que remete para a identidade das várias, ou infinitas, retas-solução possíveis, sendo todas paralelas entre si.</p> | |
| <p>PP: e em relação ao chão? O que eu posso dizer?(referindo-se às infinitas retas encontradas por eles para a situação anterior)</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|---|--|
| <p>ELVIS: (as retas) são perpendiculares (ao chão).</p> <p>SANDRO: t é perpendicular a essas $[s$ e $r]$ e essas são paralelas ao chão. Logo essa é perpendicular ao chão.</p> <p>PP: mas e se tivéssemos só r, isso valeria também? Poderia usar o mesmo argumento? (PP questiona o afirmado pelo aluno indicando a análise de uma situação próxima: se t é perpendicular somente a r que é paralela ao chão, então t é perpendicular ao chão?)</p> <p>SANDRO fica pensativo.</p> <p>PP diz da importância de uma justificativa Matemática ser consistente, mas não foca a justificção, por não ser o tema do encontro.</p> | <p>87. PERPENDICULARIDADE: perpendicularidade decorrente da disposição de outros elementos</p> |
| <p>1.2.25 Justificação de conclusões quanta à perpendicularidade das retas por meio da utilização das informações sobre a disposição das retas.</p> | |
| <p>PP propõe outra situação: agora quero r, s e t se cruzando duas a duas.</p> <p>Todos se movem buscando a representação e se dispõem de forma triangular</p>  <p>PP: só tem essa situação?</p> <p>Outra situação é vislumbrada pelos alunos, mas há dúvida sobre a validade para o buscado.</p> <p>SANDRO: aqui já num é [todas se cruzando no mesmo ponto]</p>  | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO RETAS, PONTOS E PLANOS | USG |
|--|-----|
| PP: é ou não é? Numa retomada da questão, verificam que ambas as disposições apresentadas atendem ao solicitado, e vários alunos respondem que sim. Fazem gestos afirmativos indicando a validade da afirmação naquela representação. | |
| 1.2.26 O coletivo se volta para a representação e o afirmado, constituindo o sentido da frase na interpretação e representação. | |

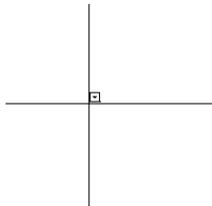
ENCONTRO 2

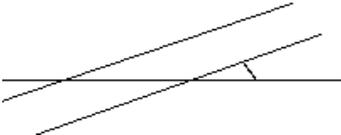
Visávamos discutir afirmações e sentenças versando sobre a posição relativa entre retas e planos. As questões apresentavam situações que deveriam ser verificadas pelos alunos, tanto quanto à possibilidade de ocorrência, à unicidade ou não dessa ocorrência e à validade do afirmado na sentença. O visado era que eles analisassem a questão proposta por meio dos materiais à disposição e buscassem esclarecer suas compreensões e, sempre que possível, apresentar uma prova convincente, em tratamento matemático ou não. Para tanto, em alguns casos, a professora-pesquisadora buscou apresentar para o grupo formas de realizar justificativas consideradas válidas matematicamente, dialogando sobre o “modo” matemático de justificar uma sentença.

A professora-pesquisadora sentiu a necessidade de discutir com os alunos diversos conceitos geométricos abordados nas atividades, vislumbrando possibilidades de explorar as compreensões dos alunos quanto aos significados desses conceitos. Assim, buscamos abrir discussões e promover debates visando favorecer a expressão das compreensões dos alunos, buscando identificar nessas expressões aspectos de sua constituição. Por conta disso, muitas questões propostas não foram analisadas no dia e, portanto, foram retomadas nos encontros posteriores.

Foram colocados diversos materiais manipuláveis à disposição dos alunos, de forma que eles pudessem montar representações que auxiliassem na análise das questões propostas. A própria representação, em certos momentos, já revelava compreensões quanto ao enunciado e auxilia na comunalização das ideias junto aos colegas e à professora-pesquisadora.

CENA 3 – MANIFESTAÇÃO DE COMPREENSÕES DE CONCEITOS I

| DESCRIÇÃO DA CENA: MANIFESTAÇÃO DE COMPREENSÕES DE CONCEITOS I | USG |
|---|--|
| <p>PP: duas coisas são perpendiculares ou ortogonais quando formam entre si...</p> <p>Os alunos complementam sua fala: 90 graus.</p> <p>PP: Se é reta com plano, reta com reta... E paralelas? O que são?</p> <p>ISIS: você quer em ângulo?</p> <p>PP: pode ser...</p> <p>ISIS: que possui ângulos iguais, né? Ah não, essa é quando são perpendiculares...</p> <p>ISIS relaciona o paralelismo com ângulos, mas parece ter confundido retas paralelas com retas perpendiculares. PP considera que ISIS referia-se aos quatro ângulos de 90 graus determinados pela intersecção de duas retas, porém confundiu os termos paralelas e perpendiculares</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>PP: me dá um exemplo de duas coisas que são paralelas.</p> <p>CLAUDIO aponta para duas mesas dispostas lado a lado e gesticula indicando que não há intersecção entre elas.</p> <p>Os demais fazem gestos positivos.</p> | <p>88. PERPENDICULARIDADE: ângulo reto</p> <p>89. PARALELISMO: possibilidade de relacionar paralelismo e ângulos</p> <p>90. PERPENDICULARIDADE: igualdade dos ângulos determinados por retas perpendiculares</p> <p>91. ÂNGULO: igualdade dos ângulos determinados por retas perpendiculares</p> <p>92. PARALELISMO: disposição de objetos</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: MANIFESTAÇÃO DE COMPREENSÕES DE CONCEITOS I</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|--|
| <p>CLAUDIO se direciona para PP buscando expor sua compreensão. A dúvida parece ter relação com a fala anterior de ISIS.</p> <p>CLAUDIO se aproxima de PP: posso falar que tem o mesmo ângulo? (gesticula como se fizesse com a mão duas retas paralelas. Indica o ângulo que as retas poderiam formar com o plano da carteira, como se esses ângulos fossem iguais)</p>  <p>PP fala da necessidade de um “referencial” para determinar tal ângulo formado. No exemplo seria o ângulo formado com a carteira</p> <p>CLAUDIO indica mais elementos para analisar retas paralelas: mesma direção e sentido...</p> <p>PP: mesma direção sim. O sentido para a reta quem atribui somos nós.</p> | <p>93. PARALELISMO: relação entre o paralelismo e ângulos determinados</p> <p>94. PARALELISMO: mesma direção e sentido</p> <p>95. RETA: possui direção e sentido</p> |
| <p>2.3.27</p> <p>A atencividade ao outro ilumina intuições e possibilita a manifestação de uma nova compreensão envolvendo os mesmos elementos: o aluno atenta para os ângulos determinados por duas paralelas, mas focando em outra possibilidade distinta daquela de seu cossujeito. Indica explorar algumas noções que já traz para os encontros e que foram focadas em virtude da atencividade à fala da colega.</p> | |
| <p>PP explica aos alunos que eles podem usar o material disponibilizado sobre a mesa (cartolina, e.v.a, palitos, isopor, canudinhos etc.) e que havia palavras grifadas de propósito nas atividades. PP destaca a importância de analisar uma afirmação e sua validade, mesmo que apenas no âmbito intuitivo.</p> <p>PP retoma a questão 1: <i>Dada uma reta (fixa) quantos planos ortogonais a ela existem?</i></p> <p>Os alunos manipulam palitos e isopor colocando-os perpendicularmente, de modo que o palito fura o isopor.</p> <p>Há conclusões como vários... infinitos...</p> | <p>96. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos</p> <p>97. INFINITO: quantidade de soluções</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: MANIFESTAÇÃO DE COMPREENSÕES DE CONCEITOS I</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|---|
| <p>PP: vários ou infinitos?</p> <p>CARMEM: vários..</p> <p>PP: vários quantos? Mil, dois mil?</p> <p>CARMEM: sei lá, vários</p> <p>ISIS e INGRID: há infinitos (e ambas analisam a representação que fizeram)</p> <p>ISIS: porque a reta pode ir pro infinito assim (gesticula como se o palito na sua mão se prolongasse e desliza o plano de isopor ao longo do palito. INGRID confirmava seus gestos)</p> <p>PP: mas como eles (os planos) são? Mostra um.</p> <p>ISIS direciona o palito perpendicular ao isopor e INGRID indica com a mão o movimento do isopor para determinar todos os infinitos planos, deslizando-o, paralelamente, ao longo da reta.</p> | <p>98. INFINITO: impossibilidade de determinar a quantidade.</p> <p>99. INFINITO: quantidade de soluções para certo problema</p> <p>100. INFINITO: gestos indicando infinitude.</p> <p>101. RETA: gestos indicando infinitude.</p> <p>102. INFINITO: quantidade de soluções para certo problema</p> <p>103. PARALELISMO: constatação de paralelismo entre as soluções possíveis</p> |
| <p>2.3.28</p> <p>A limitação do material manipulável para indicar todas as retas dá margem à possibilidade de ser contável a quantidade de planos perpendiculares a ela. A movimentação do cossujeito indica um prolongamento indefinido da reta e complementam a explicação sobre a possibilidade existirem infinitos planos.</p> | |
| <p>PP busca analisar a questão: qual a relação entre esses infinitos planos? Como eles são?</p> | |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: MANIFESTAÇÃO DE COMPREENSÕES DE CONCEITOS I</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|---|---|
| <p>Vários respondem: paralelos (os planos)</p> <p>PP: será que existe algum (plano) que é ortogonal a essa reta, mas que não é paralelo a eles (aos infinitos indicados pelas alunas)?</p> <p>ELVIS: são sempre paralelos. Pode ser assim, mas pode ser assim (muda a posição do palito de horizontal para a vertical e realiza o mesmo movimento de deslizar o isopor ao longo dele, indicando infinitude de planos possíveis)</p> <p>PP: então ele pensou outra reta e também os infinitos planos ortogonais a ela são paralelos entre si.</p> | <p>104. PARALELISMO: constatação de paralelismo entre as soluções possíveis</p> <p>105. RETA: possibilidade de disposição no espaço</p> <p>106. PARALELISMO: constatação de paralelismo entre as soluções possíveis</p> |
| <p>2.3.29 Indicação de certeza quanto à propriedade de os planos ortogonais a uma reta serem paralelos entre si, mesmo com a mudança na posição inicial da reta considerada.</p> | |
| <p>Um grupo apresenta uma possibilidade diferente. Manipulam os objetos e parece chegar a outra conclusão.</p> <p>SANDRO: aqui professora, aqui tem um plano ortogonal à reta (e apresenta a construção do grupo auxiliado pela colega)</p>  <p>(PP considera que o aluno se refere a um plano imaginário ortogonal aos dois planos representados com isopor)</p> <p>PP solicita esclarecimento: quem é a reta?</p> <p>SANDRO: o canudinho [azul]</p> <p>PP insiste para que todos analisem a situação. Pede que todos olhem a construção e eles se ajeitam para mostrar aos demais.</p> | <p>107. PERPENDICULARIDADE: visualização de um plano ortogonal à reta.</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: MANIFESTAÇÃO DE COMPREENSÕES DE CONCEITOS I</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|---|---|
| <p>PP: Os planos branquinhos de isopor são ortogonais à reta azul?</p> <p>ISIS e INGRID: ortogonais não. São paralelos.</p> <p>PP: aliás, do jeito que tá aí está parecendo..</p> <p>ISIS adiantando a fala de PP: tá parecendo um eixo. (indica a reta azul)</p> <p>PP: parece que a reta está encostando neles (nos planos). É possível ter uma reta ortogonal a um plano e que esteja contida nesse plano?</p> <p>Vários fazem gestos negativos, e indicando uma reta perpendicular.</p> | <p>108. PARALELISMO: disposição de objetos</p> <p>109. RETA: semelhança com um eixo</p> |
| <p>2.3.30</p> <p>A indicação de uma nova representação para o solicitado, mesmo incorreta frente ao proposto, revela atenciosidade e intuições dos alunos na busca por novas possibilidades. A condução da discussão não dá margem para a exploração das ideias do grupo. Na certeza da não ortogonalidade das retas apresentadas pelo grupo, a aluna se revela atenta ao pensamento em movimento da pesquisadora, adiantando, oralmente, o que esta almeja expressar.</p> | |
| <p>PP inicia a atividade seguinte: <i>Considere uma reta e um plano ambos ortogonais a uma reta dada (fixa). Qual a relação entre eles? Tente escrever uma justificativa para essa relação.</i></p> <p>O grupo de INGRID manifesta dúvidas.</p> <p>INGRID para PP: nessa, a gente considera a relação com a reta dada também?</p> <p>ISIS: Acho que não.. (volta-se para PP e lê a questão)</p> <p>O grupo explica a representação que fizeram: uma reta na mesa (representando a reta fixa) e plano e reta perpendiculares a ela.</p> <p>PP: é a relação entre os que vêm depois de fixada a reta.</p> <p>ELVIS apresenta como interpretou a questão: eu estava achando que era entre os três.</p> | |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: MANIFESTAÇÃO DE COMPREENSÕES DE CONCEITOS I</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|---|---|
| <p>PP: mas a relação entre a reta fixa com os demais já falou que é ortogonal.</p> <p>INGRID: então eles são paralelos. (manifesta compreensão)</p> <p>PP faz gesto positivo: será que vocês conseguiriam mostrar que isso vale mesmo?</p> <p>O outro grupo acompanha, observando a discussão.</p> <p>ISIS busca convencer de que não há como não ser paralela: porque por mais que você mude essa reta e esse plano de lugar (gesticula mantendo fixa a reta dada e movimenta a representação), eles sempre vão ficar paralelos.</p> | <p>110. PARALELISMO: paralelismo decorrente da disposição de outros elementos.</p> <p>111. PARALELISMO: paralelismo decorrente da disposição de outros elementos</p> |
| <p>2.3.31 Indicação de complexidade de questões envolvendo a <i>relação</i> entre elementos: o termo já carrega em si o questionamento quanto ao tipo de relação que se busca. A constatação dos alunos revela certeza, garantida na manipulação do material.</p> | |
| <p>PP: tem como o plano ser ortogonal a uma reta e não cortá-la?</p> <p>ISIS: Você está considerando o plano infinito?</p> <p>PP pergunta para o grupo: vamos sempre considerar ele infinito? (buscando negociar o sentido do termo com os alunos e é apoiada por eles)</p> <p>Todos concordam.</p> <p>ISIS: se ele for infinito, não tem como ele não cortar a reta (gesto indicando continuidade de um plano representado por um pedaço de isopor)</p> | <p>112. PLANO: possibilidade de ser finito.</p> <p>113. PLANO: infinitude indicada nos gestos.</p> <p>114. INFINITO: possibilidade de se estender um plano indefinidamente</p> <p>115. INTERSECÇÃO: plano cortando a reta</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: MANIFESTAÇÃO DE COMPREENSÕES DE CONCEITOS I | USG |
|--|--|
| <p>ELVIS fica em dúvida.</p> <p>ISIS: deixa eu te fazer uma pergunta. Se eu fosse considerar um plano que não fosse infinito [usa o isopor e um canudo ortogonal a ele], eu posso dizer que ele é ortogonal, desse jeito que tá aqui?</p>  <p>PP: Pode. O isopor seria uma região limitada.</p> <p>ISIS: aí ele não vai cortar a reta.</p> <p>Diante das dúvidas, PP retoma a discussão sobre perpendicular e ortogonal, com base nos livros texto de matemática. Estabelece com o grupo a diferença entre determinar 90° e ter intersecção, ou seja, serem perpendiculares, ou não ter intersecção e serem ortogonais.</p> <p>PP: então agora eu gostaria que vocês justificassem (a conclusão a que chegaram).</p> <p>ISIS: porque independente de onde você colocar ele sempre vai cortar a reta, porque o plano é infinito...</p> | <p>116. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade</p> <p>117. PLANO: algo infinito</p> <p>118. INTERSECÇÃO: plano cortando a reta</p> |
| <p>2.3.32</p> <p>A limitação do material se destaca na análise da situação. Há movimentação dos materiais manipuláveis, indicando os elementos envolvidos, apoiados nos gestos sinalizando infinitude, a fim de convencer da impossibilidade de outra resposta.</p> | |

CENA 4 – CERTEZAS, PROVAS E CONVENCIMENTOS

| DESCRIÇÃO DA CENA: CERTezas, PROVAS E CONVENCIMENTOS | USG |
|--|-----|
| <p>Como todos estavam na questão 2, PP estimula a discussão coletiva quanto à busca por uma justificativa. ELVIS lê o enunciado: <i>Considere uma reta e um plano ambos ortogonais a uma reta dada (fixa). Qual a relação entre eles? Tente escrever, uma justificativa para essa relação.</i></p> | |

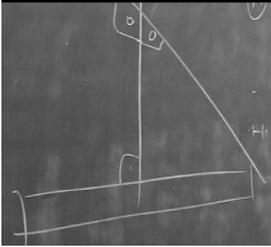
| DESCRIÇÃO DA CENA: CERTEZAS, PROVAS E CONVENCIMENTOS | USG |
|--|---|
| <p>PP pede que os alunos representem a situação. A representação de CARMEM e OLIVIA foi indicada como a melhor pelos grupos. Todos se voltam para a representação delas e passamos a analisá-la conjuntamente.</p>  <p>[a reta dada é a verde vertical. A reta vermelha e o plano de isopor são ambos perpendiculares à reta dada]</p> | <p>119. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade</p> <p>120. PARALELISMO: manipulação de objetos buscando paralelismo</p> |
| <p>2.4.33 Diversas disposições dos materiais manipuláveis para representar a situação a ser analisada, e o coletivo elege aquela que se mostra mais apropriada para expor a situação para os demais.</p> | |
| <p>PP: eu quero afirmar que esse plano e essa reta são paralelos. Como pode ser uma reta e um plano? Paralelos ou... (questiona buscando analisar a situação. Em princípio espera apenas duas respostas objetivas, uma das quais já destaca)</p> <p>ELVIS: perpendiculares. (a possibilidade de serem perpendiculares ganha destaque)</p> <p>PP: tem que ser perpendiculares? Isso não existe? [gesticula indicando retas oblíquas ao plano]</p> <p>Vários: existe</p> <p>SANDRO: ou são paralelos ou não são paralelos (ri. Considerando a resposta engraçada, talvez pela sua obviedade)</p> | <p>121. PERPENDICULARIDADE: destaque para a disposição perpendicular.</p> <p>122. RETA: possibilidade de uma reta ser ou não paralela a um plano.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: CERTEZAS, PROVAS E CONVENCIMENTOS | USG |
|---|---|
| <p>PP questiona o sentido da expressão: e o que quer dizer “não são paralelas”?</p> <p>O ângulo de 90° ganha destaque na fala dos alunos. Eles excluem a reta perpendicular (ao plano) da possibilidade de ser não paralela (a ele).</p> <p>CLAUDIO: maior que 90°</p> <p>SANDRO: que formam o ângulo, não de 90° com ela.</p> <p>ELVIS: não forma 90°.</p> <p>PP considera que os alunos atentaram para as possibilidades de retas não paralelas ao plano que ela indicou inicialmente, e portanto eles excluem as retas ortogonais ao plano da análise das retas não paralelas a esse plano.</p> <p>PP: existe um ângulo, pode formar 90°. Mas o que tem em comum essa que forma 90° e essa, essa... [gesticula representando várias retas concorrentes ao plano]</p> <p>SANDRO: diferente de 90°.</p> <p>ELVIS: maior que 90°.</p> <p>PP: pode ser maior, pode ser menor. Isso a gente vai ver ...</p> <p>ISIS: eles têm um ponto em comum.</p> <p>PP: Muito bem! Pode acontecer outra coisa entre a reta e o plano?</p> | <p>123. PLANO: possibilidade de um plano ser ou não paralelo a uma reta.</p> <p>124. PARALELISMO: possibilidade de um plano e uma reta serem ou não paralelos.</p> <p>125. PERPENDICULARIDADE: referência ao ângulo reto para expor compreensão.</p> <p>126. PARALELISMO: retas não paralelas ao plano determinam um ângulo distinto de 90°</p> <p>127. PERPENDICULARIDADE: referência ao ângulo reto para expor compreensão.</p> <p>128. INTERSECÇÃO: ponto em comum</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: CERTEZAS, PROVAS E CONVENCIMENTOS | USG |
|--|---|
| <p>[alguns indicam certeza, outros dúvida]</p> <p>PP: ou tem ou não tem um ponto de intersecção (com o plano) [gesticula usando isopor e um palito representando situações].</p> <p>ISIS: e se esta reta encostar no plano ? (faz gesto indicando como se a reta estivesse contida)</p> <p>CLADIO complementando a fala de ISIS: aí são infinitos pontos</p> <p>PP: Aí é paralela (ao plano) também e está contida. Então ou tem um, ou nenhum ou infinitos pontos (em comum). No caso de ter nenhum ou infinitos são paralelas. Então ou é paralelo e como chama quando tem um ponto em comum?</p> <p>INGRID: concorrentes.</p> | <p>129. CONTER: reta encostada no plano.</p> <p>130. CONTER: infinitos pontos de intersecção entre um plano e a reta contida nele.</p> <p>131. CONCORRÊNCIA: um ponto em comum entre reta e plano concorrentes.</p> |
| <p>2.4.34</p> <p>A expressão de situações mais usuais (que mais se manifestam em situações comuns do cotidiano) destacaram-se na análise da posição entre reta e plano. Destaque para a reta perpendicular como oposta a ideia de reta paralela. Após análise de outras possibilidades de retas não paralelas ao plano, a reta ortogonal perde seu destaque, e é excluída nas respostas. A obviedade quanto às possíveis posições entre reta e plano gera risos. Buscando pela característica comum às várias retas não paralelas ao plano, que diz da intersecção, há um direcionamento da discussão para o caso em que há mais de um ponto de intersecção. A atenção ao questionado possibilita que compartilhem compreensões.</p> | |
| <p>PP tem a intenção de discutir modos usados na matemática pra validar uma conclusão. Foca na demonstração por absurdo, e faz questionamentos diante da atividade proposta.</p> <p>PP retoma a solução da questão anterior: são paralelos, sim. Como a gente pode justificar que realmente a reta é paralela ao plano? Como só tem duas opções, ou é ou não é. Então a gente pode fazer assim: faz de conta que não é (paralela ao plano). Se (a reta) não for paralela ao plano é porque terá uma intersecção, não é? (modifica a posição da reta vermelha em relação ao plano de isopor, eliminando o paralelismo entre ambos)</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: CERTEZAS, PROVAS E CONVENCIMENTOS | USG |
|---|---|
| <p>INGRID questiona a situação proposta por PP: mas aí não é ortogonal (a reta vermelha e a reta dada, verde).</p> <p>PP insiste para que considerem a ortogonalidade entre as retas, já que não propôs nenhuma modificação quanto à ortogonalidade indicada pelo enunciado.</p> <p>PP: faz de conta que é (ri). O ângulo ali é de 90. Vocês estão conseguindo ver um ângulo de 90 aqui? (brinca com os alunos, pois a imagem estava inclinada, perdendo a ortogonalidade entre as retas). Quem não consegue, pode tratar de abstrair e ver (ri)</p> <p>ELVIS: todo mundo?</p> <p>Os alunos acham engraçada a contradição entre a representação e a afirmação.</p> <p>PP volta-se para OLIVIA (que parecia discordar): tá vendo um ângulo de 90? Você tem que fazer um esforço e falar: eu estou vendo.</p> <p>OLIVIA: Ah, tá! (olhar interrogativo)</p> <p>Vários Risos</p> <p>PP busca esclarecer: Olha só, o ângulo é de 90, porém eu estou falando que não é paralela. 90° foi uma condição dada (entre as retas) vocês têm que aceitar, não podem mudar isso. Está no enunciado. O que vocês podem mudar é a consequência: ou é paralelo ou não é. Vamos supor que aqui é 90 (indica as retas) e a reta não seja paralela ao plano. Está todo mundo vendo 90? (PP mexe no palito para ressaltar e aponta para a intersecção das retas). E porque estão vendo?</p> <p>OLIVIA: eu não estou vendo 90 aqui não (ri). (insiste que não visualiza o indicado por PP)</p> <p>PP: se não viu vai ter que ver (risos). E porque vai ter que ver?</p> <p>Pausa silenciosa</p> <p>SANDRO, NOVAES e CLAUDIO: foi exigência, foi dado.</p> | <p>132. PERPENDICULARIDADE: visualização de disposição não perpendicular.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: CERTEZAS, PROVAS E CONVENCIMENTOS | USG |
|--|---|
| <p>PP: isso mesmo... Então foi falado, vocês têm que imaginar. Desde o começo eu falei que a reta era ortogonal à reta dada e ao plano também. Mas eu falei que era paralelo?</p> <p>Vários: não.</p> <p>PP: então a gente pode supor que não é (paralelo) e ver o que acontece. Se chegar num resultado estranho, tem coisa errada na suposição.</p> | |
| <p>2.4.35 O apelo para a imaginação de uma situação quase inaceitável revela estranhamentos. Ao analisar a situação e partilhar compreensões puderam vislumbrar a validade das informações disponíveis.</p> | |
| <p>OLIVIA modifica sua representação para mostrar a situação proposta: e se for assim? (mexe no palito vermelho até ele tocar no isopor)</p>  <p>PP insiste: quantos graus têm aqui [aponta a intersecção das duas retas]</p> <p>Vários: 90 (revelam clareza)</p> <p>PP: vamos olhar ali. Se eu falar que forma 90 mas não é paralela, então o que aconteceu entre essa reta e esse plano?</p> <p>INGRID: a reta encontrou o plano.</p> <p>CLAUDIO: encontrou num ponto.</p> <p>INGRID e CLAUDIO revelam clareza na afirmação</p> | <p>133. INTERSECÇÃO: reta e plano se encontram</p> <p>134. INTERSECÇÃO: ponto de encontro</p> |
| <p>2.4.36 A representação com o uso de materiais indica auxiliar na constatação dos alunos que vislumbram a possibilidade de intersecção da reta com o plano</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: CERTEZAS, PROVAS E CONVENCIMENTOS | USG |
|--|---|
| <p>PP representa o esquema de OLIVIA na lousa e continua com os questionamentos, retoma os elementos envolvidos, enfatizando a proveniência das informações. A situação se revela mais aceitável para os alunos.</p> <p>PP: Vou fazer um desenho aqui, olhando de frente para o esquema dela (de OLIVIA), aqui tá o plano, a reta dada aqui forma 90 (com o plano), tem a outra reta aqui com noooooveeeeentaaa (Vários risos)</p>  <p>PP: que figura formou aqui?</p> <p>VÁRIOS: triângulo</p> <p>PP: e que ângulo é aqui? [aponta para a intersecção da reta dada com o plano]</p> <p>VÁRIOS: noventa.</p> <p>PP: de onde saiu essa informação?</p> <p>ISIS, INGRID: foi dado.</p> <p>[PP indica na lousa quem é a reta fixada, usando giz colorido, por notar confusão na sua identificação]</p> | <p>135. PERPENDICULARIDADE: ângulo reto</p> |
| <p>2.4.37 Após discussões e negociação dos aspetos envolvidos, os alunos se mostraram mais confortáveis em aceitar uma situação “estranha” ou contraditória.</p> | |
| <p>PP retoma toda análise proposta, a fim de esclarecer aquele modo de proceder em busca de uma justificativa matemática</p> <p>PP: quando é dado, a gente fala que é a hipótese. É como supor alguma coisa. (...) Então uma maneira de provar em Matemática, um recurso muito usado, é quanto você tem algo que só pode ser uma coisa ou outra... Então ou uma reta e um plano são paralelos ou não são [aponta a figura no quadro], não pode ser outra coisa. Então você supõe assim: se fosse outra coisa, diferente do constatado, chegaria a um absurdo? Alguém tá vendo um absurdo no desenho (aponta o desenho)?</p> | |

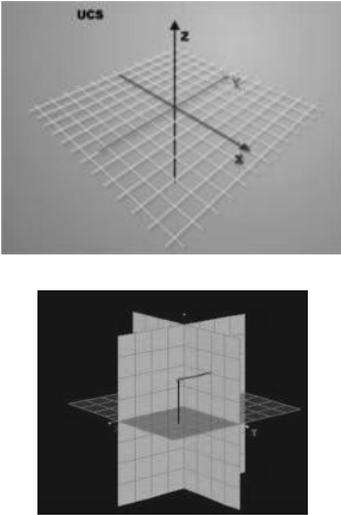
| DESCRIÇÃO DA CENA: CERTEZAS, PROVAS E CONVENCIMENTOS | USG |
|--|---|
| <p>Durante a explicação SANDRO já se mostra atento e aponta o “absurdo” que identifica no desenho e compartilha sua compreensão.</p> <p>SANDRO: se se falar que tem dois ângulos de 90 graus, então já tem 180. E o ângulo de cá? Então você já tá falando que tem mais que 180 graus.</p> | <p>136. ÂNGULO: soma dos ângulos de um triângulo.</p> |
| <p>2.4.38 A retomada do procedimento de uma justificativa por absurdo coloca o aluno atentivamente voltado para a representação, de modo que busca manifestar sua compreensão, já revelada na ativididade ao exposto.</p> | |
| <p>PP faz um comentário relacionando a justificativa com o trabalho de defesa de um advogado e suas pistas.</p> <p>PP: quais são as nossas pistas aqui? Nossas hipóteses?</p> <p>CLAUDIO: os dados?</p> <p>PP aponta no desenho e analisam o que foi “dado” no enunciado</p> <p>[dão risada quando PP aponta o ângulo de 90]</p> | |
| <p>2.4.39 Revelam-se mais confortáveis com a proposta apresentada após a discussão coletiva e a condução a um absurdo, que já era identificado no início da construção ao não aceitarem a inclinação da reta, se revelou engraçada pelo próprio estranhamento causado.</p> | |

CENA 5 – INTERPRETANDO O ENUNCIADO

| DESCRIÇÃO DA CENA: INTERPRETANDO O ENUNCIADO | USG |
|--|-----|
| <p>Em duplas e trios os alunos iniciaram a análise das situações propostas</p> <p>Questão 4: <i>Considere uma reta qualquer em um sistema de coordenadas cartesianas. Verifique se sempre é possível encontrar um plano perpendicular a esta reta e que passe pela origem.</i></p> | |

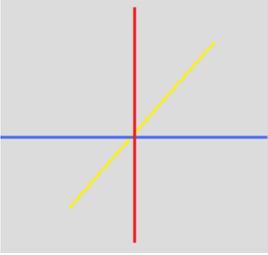
| DESCRIÇÃO DA CENA: INTERPRETANDO O ENUNCIADO | USG |
|--|--|
| <p>OLIVIA chama PP para pedir esclarecimentos e os demais grupos se voltam para a discussão. Os alunos se mobilizam para representar a situação. Houve bastante dúvida na interpretação da questão e os alunos falam ao mesmo tempo, alguns apresentando suas conclusões.</p> <p>ISIS movimenta sua representação e manifesta a impossibilidade que verifica ao manipular o material.</p> <p>ISIS (manipulando sua representação): mas não dá porque não tem como... (ri)</p> <p>OLIVIA: essa (questão) quatro seria isso aqui [mostra uma representação que o grupo fez de um sistema de coordenadas. Ela explica quem é x, y e z]</p> <p>ISIS: tinha que ter uns palitinhos para representar o sistema</p> <p>INGRID buscando apresentar a solução que encontrou: olha aqui, o plano tem que passar pela origem, certo? [PP faz gesto positivo]. E tem que ser ortogonal à reta que eu peguei.</p> <p>PP: que é uma reta qualquer do espaço.</p> <p>INGRID: então a reta só pode tá nessa posição aqui ó, porque qualquer outra posição ela não vai ser ortogonal ao plano [ela inverte a situação: primeiramente fixa um plano passando pela origem e depois considera uma reta ortogonal a ele e conclui que só pode ser aquela reta]</p> <p>PP busca fazer com que a aluna pense no enunciado, visando ao seu esclarecimento.</p> <p>PP: Qual objeto que é dado? É a reta, não é? Ela vem primeiro, depois é que vem o plano.</p> <p>INGRID: mas nem sempre... (insiste na impossibilidade de haver uma resposta positiva ao enunciado proposto)</p> <p>PP pede que indique quando não é possível e ela se volta atentivamente para a sua construção, analisando-a.</p> | <p>137. SISTEMA DE COORDENADAS: representação com materiais concretos.</p> |
| <p>2.5.40</p> <p>O enunciado, além de longo e com várias informações, revela dificuldades de interpretação. Há ênfase na condição de perpendicularismo e a ordem com que os elementos devem ser dispostos na representação acaba sendo desconsiderada. Diante da certeza da impossibilidade, buscam investigar melhor a situação.</p> | |

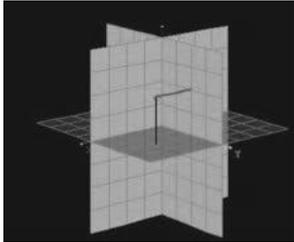
CENA 6 – ANALISANDO COMPREENSÕES DO R3

| DESCRIÇÃO DA CENA: ANALISANDO COMPREENSÕES DO R3 | USG |
|---|---|
| <p>[Diante das dúvidas dos alunos, PP adianta um uma questão, acreditando que ela seria um auxiliar para esclarecer as dúvidas. Pede que os alunos façam tal questão (a sete) antes de continuar, uma vez que entende que essa atividade irá ajudar na compreensão das demais]</p> <p>Questão 7: <i>Considerando o sistema de coordenadas cartesianas no espaço representados a seguir, identifique os eixos coordenados e os planos coordenados:</i></p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>CLAUDIO: os quadriculados representam outros planos? Tem o plano cortando na horizontal. Onde tem essas linhas tem outros planos pra cima e pra baixo?</p> <p>CLAUDIO visualiza outros planos a partir das linhas do desenho e ISIS tenta explicar a compreensão da dupla. PP: onde tem o quadradinho?</p> <p>ISIS atenta, complementa a explicação de CLAUDIO: cada linhazinha forma um plano..</p> <p>PP: pode ser... Mas não são planos coordenados.(eles concordam</p> | <p>138. SISTEMA DE COORDENADAS: identificação de planos paralelos aos planos coordenados</p> <p>139. SISTEMA DE COORDENADAS: identificação de planos paralelos aos planos coordenados</p> |
| <p>2.6.41 Manifestação de compreensão dos elementos presentes na figura que busca representar algo tridimensional e identificação de outros elementos que visualizam a partir do que é dado. Há complementação na manifestação das compreensões, revelando atentividade ao exposto.</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: ANALISANDO COMPREENSÕES DO R3 | USG |
|--|--|
| <p>PP busca discutir o sistema de coordenadas plano e o espacial. Confecciona um sistema de três coordenadas cartesianas usando palitos e durex e compara ao plano cartesiano (de duas dimensões) que desenha na lousa.</p> <p>PP: aqui (na representação da lousa) o ponto está localizado em x e y. É fácil localizar as coisas no R2. Acontece que a gente vive onde?</p> <p>Vários: no R3</p> <p>PP: então a gente tá aqui, e agora precisa de mais uma dimensão. Poderia ser outro eixo ... [usa um palito sobre a figura desenhada, indicando um eixo no mesmo plano do sistema desenhado, ou seja, no plano da lousa] se tiver aqui, saí do R2?</p> <p>Vários: não</p> <p>PP: então como tem que ser?</p> <p>Os gestos dos alunos indicam o eixo saindo da lousa, perpendicularmente a ela. Expõem tentativas de ultrapassar a planitude do sistema representado na lousa, revelando atentividade e clareza de compreensão.</p> <p>PP: tem que ser saindo da lousa. [Apontam como se o eixo saísse da lousa em 90 graus.]</p> | <p>140. ESPAÇO: dimensionalidade do espaço</p> <p>141. SISTEMA DE COORDENADAS: indicação da direção dos eixos.</p> <p>142. SISTEMA DE COORDENADAS: perpendicularidade dos elementos.</p> |
| <p>2.6.42 Os gestos dão conta de manifestar a clareza na compreensão e as tentativas de propor certa ortogonalidade para o eixo buscado (o terceiro eixo), como algo que “sai” da lousa.</p> | |
| <p>PP enfatiza a determinação de planos no espaço tridimensional.</p> <p>PP: No espaço a gente tem mais um elemento, os planos.</p> <p>CLAUDIO: plano é tipo uma referência?</p> <p>PP acredita que se trata de referência para localização.</p> | <p>143. PLANO: uma referência</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: ANALISANDO COMPREENSÕES DO R3</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|---|---|
| <p>PP: ajuda muito como referência no espaço. A reta também... agora não basta... Tem que ter algumas convenções.</p> <p>Vários concordam.</p> | |
| <p>2.6.43 Indicação da possibilidade de os planos serem uma referência no espaço.</p> | |
| <p>A partir da representação que elabora PP questiona sobre a origem do sistema cartesiano tridimensional.</p> <p>PP: qual o melhor lugar para ser a origem [exibe o sistema que elaborou com os palitos]?</p> <div data-bbox="491 887 756 1137" style="text-align: center;"> </div> <p>Todos indicam a intersecção dos eixos.</p> <p>OLIVIA: agora estou começando a entender, o x seria o... [aponta o eixo correspondente, indicando sua direção e revelando compreensão]</p> <p>[PP aponta os demais eixos e os alunos vão nomeando x, y e z, em correspondência com o que foi estabelecido na aula anterior]</p> <p>PP ressalta a ideia de convencionar o sentido dos eixos, bem como a forma como, em geral, os livros representam os eixos em seus esquemas.</p> <p>PP: As especificações são aceitas por convenção. Se eu falar que eu não quero que o x seja azul, quero que seja o amarelo, beleza. Mas um vai estar falando uma coisa e o outro, outra. Nos desenhos que você vê num livro de matemática, dificilmente não vai tá assim.</p> | <p>144. SISTEMA DE COORDENADAS: indicação da direção dos eixos.</p> |
| <p>2.6.44 A retomada da análise do sistema tridimensional com o uso do material manipulável indica uma melhor compreensão, auxiliando no entendimento do desenho em perspectiva de um sistema de coordenadas.</p> | |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: ANALISANDO COMPREENSÕES DO R3</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|--|
| <p>PP [retoma o esquema dos três eixos feito com palitos]: pensa no amarelo e no azul (nos eixos amarelo e azul). Tem um plano que os contém... se preencher aqui de pontos... toda essa região forma um plano [gesticula com um folha de sulfite como que contendo os eixos indicados formando um plano que os contém]</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>CLAUDIO: um plano...são infinitas retas que se interceptam e formam um plano? Sei lá, porque pra formar um ponto tem que interceptar, e o plano é um conjunto de pontos juntos. (revela incerteza quanto àquilo que constitui o plano e sua análise destaca os pontos, mas atenta para a possibilidade desses pontos serem originados da intersecção de retas)</p> <p>PP destaca que o conjunto não é dado de qualquer modo.</p> <p>PP: mas não é um ‘junto’ de qualquer maneira, né?</p> <p>SANDRO: um junto organizado.</p> <p>PP: com certa planitude [gesto com a mão no plano da mesa]. Você falou de elementos difíceis de definir ou explicar. O que é ponto?</p> <p>SANDRO: e o plano vazio... Existe um plano vazio? (ri, referindo-se à definição que ele apresentou no encontro anterior, já que a constituição por pontos entra em contradição com tal definição).</p> <p>PP: Faz sentido pensar num plano vazio?</p> <p>CLAUDIO: mas se é plano... (não é possível concluir se CLAUDIO concorda ou discordar)</p> | <p>145. PLANO: constituído de pontos</p> <p>146. PLANO: constituído de retas que se interceptam.</p> <p>147. PONTO: intersecção de duas retas</p> <p>148. PLANO: modo de organização dos pontos</p> <p>149. PLANO: vazio</p> |
| <p>2.6.45 Há destaque para o elemento de constituição do plano: os pontos são obtidos pelas retas que se interceptam, portanto devem fazer parte da constituição do plano. A atencividade do cossujeito destaca o modo organizado pelo qual esses elementos devem estar dispostos. A complexidade da discussão remete a intuições sobre esses conceitos.</p> | |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: ANALISANDO COMPREENSÕES DO R3</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|---|--|
| <p>PP retoma a questão buscando dar ênfase ao explicitado por CLAUDIO sobre os planos servirem de referência.</p> <p>PP: vamos voltar ao nosso sistema de coordenadas. A reta ajuda a gente a se localizar, mas se tiver uns planos ajuda mais ainda. Existem infinitos. Existem os que contêm os eixos e existem outros. Olhem o desenho 2 (do exercício)</p>  <p>PP buscando retomar a ideia apresentada por CLAUDIO: se eu passar um plano por esses quadradinhos... Existem infinitos, não existe? [e gesticula com a folha de sulfite e o esquema feito de palitos coloridos, indicando vários planos paralelos ao plano xy da figura]</p>  <p>Gestos positivos.</p> <p>PP: mas existe um que é especial, que contém o x e o y. Que nome nós vamos dar pra ele?</p> <p>SANDRO: plataforma? (Há confirmação de alguns alunos)</p> <p>Apesar de inesperado o uso do termo, PP destaca a conveniência do termo.</p> <p>PP: porque é a base? (pausa) Por convenção a gente fala 'é o plano composto por x e y'. Então ao invés de falar o seu termo que faz muito sentido – plataforma – o plano se chama "plano coordenado xy".</p> | <p>150. PLANO: plataforma</p> <p>151. SISTEMA DE COORDENADAS: plataforma</p> |
| <p>2.6.46 Utilização de um termo cotidiano que revela-se apropriado para a situação: o plano xy na figura da atividade remete a uma <i>plataforma</i>.</p> | |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: ANALISANDO COMPREENSÕES DO R3</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|---|
| <p>OLIVIA, indicando a representação na lousa: e aí o x é o que vem pra baixo aqui? [indica o eixo x do sistema tridimensional desenhado na lousa, que parece descer, devido à perspectiva da figura]</p> <p>PP: o positivo é o que sai da lousa. Que poderia ser ao contrário, mas alguém disse que esse é o lado positivo. [coloca a construção de palitos ao lado do desenho] olha esse desenho e olha esse. Veja como perde a perspectiva, né? (buscando ressaltar a ortogonalidade perdida na afirmação de OLIVIA)</p> <p>PP convencionou com os presentes os sentidos positivos e negativos dos eixos. Depois, com o sulfite, indica os três planos coordenados.</p> | <p>152. SISTEMA DE COORDENADAS: indicação da direção do eixo na representação plana</p> |
| <p>2.6.47 Apesar de as discussões indicarem compreensão sobre a posição dos eixos coordenados no sistema tridimensional, a análise do desenho do sistema na lousa, em perspectiva, destaca o eixo x descendo.</p> | |
| <p>PP retoma a análise das representações.</p> <p>PP retomando a questão: o primeiro desenho tá na convenção que a gente combinou?</p> <div data-bbox="424 1323 823 1624" data-label="Image"> </div> <p>SANDRO: depende de como você olha... o y tá entrando.</p> <p>Gestos nos grupos mirando o desenho na folha. Movimentam a folha, buscando visualizar a ordenação dos eixos.</p> | <p>153. SISTEMA DE COORDENADAS: indicação da direção do eixo na representação plana</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: ANALISANDO COMPREENSÕES DO R3 | USG |
|---|---|
| <p>NOVAES: você tem que olhar assim (gira a folha e a mira lateralmente, como se a figura possuísse uma tridimensionalidade que permitisse olhar em torno do sistema representado)</p>  <p>CLAUDIO: tem que virar [faz um movimento como se girasse o plano xy entorno de z na figura estática do papel]</p> | <p>154. SISTEMA DE COORDENADAS: percepção da tridimensionalidade da representação plana</p> <p>155. SISTEMA DE COORDENADAS: modo de sentir a tridimensionalidade da representação plana</p> |
| <p>2.6.48 Distintas formas de olhar para a representação do sistema de coordenadas tridimensional no papel, indicando convergências de compreensão e busca por vislumbrar a posição convencionada. Do seu <i>ponto zero</i> o corpo próprio direciona o olhar em torno da figura, movimentando ou rotacionando, imaginativamente, a figura representada estaticamente. Com a movimentação a figura ganha a tridimensionalidade perdida pela planitude do papel.</p> | |

CENA 7 – RETOMANDO A INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO A INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO | USG |
|--|-----|
| <p>Os alunos retomam o exercício 4: <i>Considere uma reta qualquer em um sistema de coordenadas cartesianas. Verifique se sempre é possível encontrar um plano perpendicular a esta reta e que passe pela origem.</i></p> <p>INGRID: nem sempre... é uma reta qualquer que foi dada (...) dependendo da reta que eu pegar, não dá.</p> <p>PP: qual é esse que você achou que não dá? Se tiver um caso que não dá, a resposta será negativa.</p> <p>INGRID leva em consideração a explicação dada por PP anteriormente.</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO A INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO | USG |
|--|--|
| <p>INGRID explica: aqui ó [monta um esquema com isopor e palitos para explicar e representa o primeiro octante de um sistema de coordenadas. Coloca um palito pra representar a reta dada e depois o isopor para o plano, de forma que ele passe pela origem do sistema. Movimenta o plano buscando deixa-lo perpendicular à reta, mas isso não é possível, pois sua análise se mantém focada no primeiro octante e da forma como dispôs os elementos, isso só ocorreria em outro octante. A representação da reta limitada pelo material manipulável, parece ter enfatizado o foco apenas no primeiro octante].</p> <p>A limitação da análise de INGRID ao primeiro octante impossibilita verificar que o plano ficaria perpendicular à reta apenas no outro octante, ou seja, seria preciso “prolongar” o palito.</p> <p>INGRID: agora, se eu pegar uma reta assim, ó, aí dá [altera a posição do palito (reta) de forma a ficar perpendicular ao plano (isopor) que passa pela origem, mantendo suas análises focadas no primeiro octante].</p> <p>PP retoma o caso em que não foi possível: ela (a reta) é infinita né? (...) esquece a origem. Pensa só no plano ser ortogonal. Vai mexendo com ele e vê se em algum momento ele passa pela origem.</p> <p>[demais grupos gesticulam e conversam entre si a todo momento, atentos ao investigado]</p> | <p>156. SISTEMA DE COORDENADAS: limitação ao primeiro octante.</p> <p>157. RETA: limitada, como o material usado para representá-la</p> <p>158. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade</p> <p>159. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> <p>160. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade</p> |
| <p>2.7.49 Há reorganização no modo de tratar as informações do enunciado, mas a limitação do “espaço” ao se trabalhar com elementos infindáveis (planos e retas) por meio dos materiais sugere possibilidades de não ocorrer a ortogonalidade intencionada.</p> | |

ENCONTRO 3

Como no encontro anterior não foi possível focar a maioria das questões, este encontro acabou sendo uma extensão daquele.

Formaram-se dois grupos (pela proximidade ou afinidade) e foi solicitado que confeccionassem, em grupo, um sistema de coordenadas cartesianas tridimensional para auxiliar nas atividades. Buscamos, com isso, retomar a ideia do sistema de coordenadas que “organiza” o espaço, já que foi possível perceber, nos outros encontros, que o plano cartesiano (R2) era conhecido por todos, mas o espacial (R3) carecia de mais explorações. Canudos, palitos, isopor, e.v.a etc. foram colocados sobre a mesa, disponíveis para os alunos.

Esperávamos que os alunos fizessem o sistema de coordenadas como o do encontro anterior, seguindo a representação que a professora-pesquisadora criou, mas os sistemas de coordenadas que construíram ficaram bem diferentes uns dos outros. Houve a preocupação de todos os grupos em identificar os eixos e sua orientação.

Os alunos utilizaram diferentes tipos de materiais e o tempo todo lançavam mão da sua representação elaborada para expor o que estavam pensando. Isso auxiliava a pesquisadora e os demais colegas a interpretar as expressões do compreendido pelos demais.

Logo no início do encontro havia muita preocupação dos alunos com a posição dos eixos. Por isso, surgiu a ideia de perguntar se, no caso de a ordenação dos eixos ser diferente, o sistema de um iria coincidir com o do outro, por meio de uma movimentação.

Este encontro também avançou na discussão de elementos geométricos, como ângulo, infinito, área e outros considerados comuns. As compreensões dos alunos revelaram-se muitas vezes distintas umas das outras, porém apontando para convergências possíveis. Vale destacar que houve muitos questionamentos por parte dos alunos que pareciam mais seguros para compartilhar seus entendimentos e dúvidas, que nos encontros anteriores.

CENA 8 – MOVIMENTAÇÃO DOS SISTEMAS

| DESCRIÇÃO DA CENA: MOVIMENTAÇÃO DOS SISTEMAS | USG |
|--|-----|
| No encontro anterior, foi discutida a possibilidade de rotacionar os sistemas de coordenadas nas figuras apresentadas, então PP aproveita a representação do sistema de coordenadas elaborada pelos alunos para discutir a possibilidade de elas coincidirem ao se deslocar uma sobre a outra. | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: MOVIMENTAÇÃO DOS SISTEMAS | USG |
|--|--|
| <p>PP: agora vamos fazer um exercício. Esse sistema de coordenadas [e indica a construção feita com palitos e os eixos x, y e z], eu consigo vir aqui [leva o sistema até o do outro grupo], e movimentar para ver se coincidem os eixos x, y e z com o deles (aponta para o sistema de um dos grupos, indicando o sentido positivo dos eixos).</p> <p>Todos notam a possibilidade de “encaixar” os eixos de um no outro. Então PP pede que CLAUDIO inverta o sentido do eixo x do seu sistema de coordenadas.</p> <p>PP: faz o seguinte, muda o sentido do seu x. Ao invés de ele estar virado para cá, vire pra lá.</p> <p>[CLAUDIO retira o palito que representa o eixo x e inverte o sentido da seta que indica o sentido positivo, ou seja, altera o sentido positivo com o negativo]</p> <p>CLAUDIO: isso? O y continuaria o mesmo só o x que passou o sentido positivo pra trás.</p> <p>PP: Olha o que ele fez, saiu daquele padrão que a gente discutiu... não é o convencional.</p> <p>CLAUDIO: mas se eu virar... (movimenta seu novo sistema)</p> <p>PP: Essa que é a minha (representação), se eu pegar este aqui (o meu sistema) e der na sua mão, você consegue mexer nele, de modo que o x, y e z coincidam? positivo com o positivo? x com x positivo, y com y... sentido também... [PP muda de lado para que o outro grupo possa observar]</p> <p>CLAUDIO movimenta os sistemas buscando sobrepô-los e destaca a impossibilidade dos dois sistemas de coordenadas coincidirem agora.</p> | <p>161. SISTEMA DE COORDENADAS: representação com materiais concretos.</p> <p>162. SISTEMA DE COORDENADAS: sentidos positivo e negativo dos eixos</p> <p>163. SISTEMA DE COORDENADAS: possibilidade de mover a representação.</p> <p>164. SISTEMA DE COORDENADAS: sentidos positivo e negativo dos eixos.</p> <p>165. SISTEMA DE COORDENADAS: possibilidade de mover a representação</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: MOVIMENTAÇÃO DOS SISTEMAS | USG |
|--|-----|
| Outras mudanças no sentido dos eixos são solicitadas e verifica-se que em certos casos seria possível sobrepor as representações e, em outros, não era possível executar tal tarefa. | |
| <p>3.8.50</p> <p>A negociação no estabelecimento de notações e direções revela compreensão, e, na retomada da atividade, o aluno indica modos de proceder junto à representação que elabora, consonante com a discussão da aula anterior na qual havia apenas a figura plana no papel.</p> | |

CENA 9 – INTERPRETANDO NOTAÇÕES E CONCEITOS

| DESCRIÇÃO DA CENA: INTERPRETANDO NOTAÇÕES E CONCEITOS | USG |
|--|---|
| <p>Iniciamos as atividades:</p> <p>Questão 1: <i>Veja se sempre é possível encontrar uma reta paralela ao plano yz e perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto (fixo) dessa reta dada. (analise a unicidade (ou não) da resposta)</i></p> <p>ELVIS: paralelo aos dois ao mesmo tempo, a y e a z? [Ele parece identificar separadamente os eixos y e z, buscando uma reta paralela a ambos os eixos e não ao plano determinado por eles, o plano yz]</p> <p>PP questiona para compreender a interpretação de ELVIS: aos dois quem?</p> <p>[diante da dificuldade de ELVIS em se expressar, PP retoma a discussão sobre planos coordenados]</p> <p>PP: x, y e z são eixos... Se fosse só x era o eixo, mas e xy... Se eu fizer xy, o que é xy?</p> <p>ELVIS: é o par ordenado?</p> <p>Diante da proximidade da notação, PP retoma os significados de cada uma.</p> | <p>166. PARALELISMO: paralelismo aos eixos coordenados</p> <p>167. SISTEMA DE COORDENADAS: nomenclatura que remete a par ordenado</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: INTERPRETANDO NOTAÇÕES E CONCEITOS | USG |
|---|--|
| <p>PP usa a lousa para auxiliar na explicação: o par ordenado é indicado por (x,y). Já xy indica o plano, lembra da aula anterior? (retoma explicação anterior sobre o plano yz) quem é y? quem é z? O que é yz? Então yz tem que ser alguma coisa que envolva os dois, o eixo y e o eixo z. Algo que envolve os dois.</p> <p>[Alguns alunos fazem gestos que indicam o plano]</p> <p>PP: é esse plano aqui [indica o plano yz em seu sistema usando uma folha de sulfite]. Então pensa assim: existe uma reta que é paralela a esse plano? [gesticula usando um canudo para representar a reta paralela a yz]</p> <p>Vários gestos positivos, acompanhando e fazendo movimentação com as mãos, indicando o plano.</p> <p>PP: existe um monte, várias, infinitas... Mas a questão agora não é só isso.</p> | <p>168. SISTEMA DE COORDENADAS: gestos indicando os planos coordenados.</p> <p>169. PLANO: gestos indicando planitude</p> <p>170. PLANO: gestos indicando planitude</p> |
| <p>3.9.51 A semelhança de notações, para conceitos muito diferentes, leva o aluno a uma compreensão não adequada e que indica ter colaborado com a interpretação do solicitado na questão. Gestos de alunos expressam suas compreensões.</p> | |
| <p>ISIS: eu posso considerar uma reta tanto assim, como assim? (os gestos indicam duas retas de direções distintas, mas ambas paralelas ao plano yz. Por último, ela indica uma reta paralela ao eixo x)</p> <p>OLIVIA: Se fosse assim seria paralelo a outro plano (indicando a reta paralela ao eixo x, aponta para o plano xz).</p> | <p>171. SISTEMA DE COORDENADAS: Identificação de planos e eixos coordenados</p> <p>172. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> <p>173. SISTEMA DE COORDENADAS: Identificação de planos coordenados</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: INTERPRETANDO NOTAÇÕES E CONCEITOS | USG |
|--|---|
| <p>3.9.52 Apoio no material manipulável na busca por várias representações possíveis e adequação ao questionado, o que possibilita que o cossujeito interfira na exposição, compartilhando sua compreensão</p> | |
| <p>PP sente necessidade de dialogar com os alunos sobre o significado de alguns termos importantes, como paralelo, perpendicular, ortogonal, concorrente e reversa. Então retoma o entendimento do grupo sobre esses termos.</p> <p>PP: perpendicular é quando forma 90° e toca... pode ser plano com plano, reta com reta (...) faz sentido falar ponto perpendicular a uma reta? (destaca uma situação não convencional, para promover a discussão entre os presentes)</p> <p>ISIS gesticula positivamente: é, porque uma reta vai tá assim e um ponto vai tá aqui [dispõe o canudo na vertical sobre a mesa e aponta para a intersecção do canudo com a mesa].</p> <p>CLAUDIO: mas um ponto tá contido na reta, né</p> <p>ISIS: mas eu penso assim, tem um ponto aqui, faz de conta que esse é o ponto [indica com o dedo sobre a mesa]... tá formando 90° com esse ponto.</p> <p>Os alunos fazem gestos negativos, indicando que não concordam com ISIS.</p> <p>PP: ele não está formando 90° com o ponto, ele esta formando 90 com o que?</p> <p>Alguns: com a mesa, o plano.</p> <p>ISIS: mas ele (o plano) não tá no ponto? Assim, o plano contido... (PP considera que há confusão na explicação de ISIS)</p> <p>SANDRO argumenta: Mas então o próprio ponto pode ser a própria reta também.</p> <p>PP: tira o plano, pensa na reta e nesse ponto.</p> <p>ELVIS: vai ser a própria reta. (completa a explicação)</p> | <p>174. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade</p> <p>175. PONTO: contido na reta</p> <p>176. PERPENDICULARIDADE: perpendicular a ponto</p> <p>177. PONTO: contido na reta.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: INTERPRETANDO NOTAÇÕES E CONCEITOS | USG |
|---|--|
| <p>PP: tem necessidade de um suporte aqui [aponta a base do canudo que usa para representar]</p> <p>ELVIS: uma reta...</p> <p>PP: uma reta, um plano.</p> <p>ISIS parece vislumbrar tal necessidade e concorda.</p> <p>PP: faz sentido ponto paralelo a reta? [gestos com canudos e indicação de um ponto] .. Sempre é, e sempre não é..</p> <p>CLAUDIO: fica muito abstrato falar qualquer coisa desse ponto em relação à reta, né.</p> <p>PP: ou está contido ou não está. Isso faz sentido. (gesticula, indicando um ponto na reta ou fora dela. Há gestos afirmativos.)</p> | <p>178. RETA: suporte para a perpendicular.</p> <p>179. PONTO: dificuldade dizer sobre o ponto.</p> <p>180. RETA: dificuldade dizer sobre a reta.</p> |
| <p>3.9.53</p> <p>A discussão sobre uma situação não usual manifesta diversas compreensões, convergentes ou não, o que possibilitou buscar modos de trabalhar possibilidade de compreensão sobre perpendicular. Destaca-se a complexidade das relações entre reta e ponto.</p> | |
| <p>PP retoma a ideia de perpendicular e ortogonal discutida anteriormente, e busca levantar outros questionamentos.</p> <p>PP: uma reta e um plano que formam 90 graus entre si podem não se interceptar? [representa com folha e canudo distantes um do outro]</p> <p>[Silêncio e depois alguns alunos gesticulam negativamente]</p> <p>ISIS: ai vai cortar o plano... [gesticula como se completasse o plano com a mão até tocar o canudo]</p> <p>CLAUDIO: porque estende pra lá zizzz... [gesticula e faz um som, indicando prolongamento do plano]</p> | <p>181. PLANO: infinitude indicada nos gestos.</p> <p>182. INTERSECÇÃO: reta cortando o plano</p> <p>183. PLANO: infinitude indicada nos gestos e sons</p> <p>184. INFINITO: gestos e som indicando infinitude</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: INTERPRETANDO NOTAÇÕES E CONCEITOS | USG |
|---|--|
| <p>3.9.54 A compreensão da infinitude dos elementos é exposta nos gestos e no som manifestado nas explicações.</p> | |
| <p>PP: quando duas coisas são <i>concorrentes</i>?</p> <p>ISIS: quando elas têm um ponto em comum.</p> <p>PP: um só? Dois planos podem ser concorrentes? [usa duas folhas e gesticula]</p> <p>Vários: pode</p> <p>PP: é um ponto só que eles têm em comum?</p> <p>NILSON: mas uma reta com uma reta é só um ponto né?</p> <p>PP: é só um ponto... depende dos elementos envolvidos</p> <p>CLAUDIO dispõe duas cartolinas, uma sobre a outra, representando dois planos coincidentes: aqui a intersecção é infinita né?</p> <p>PP questiona: sim, mas são concorrentes aí? [gestos negativos]</p> <p>Vários: coincidentes.</p> | <p>185. CONCORRÊNCIA: ponto em comum</p> <p>186. CONCORRÊNCIA: ponto em comum</p> <p>187. RETA: um ponto comum a duas retas concorrentes.</p> <p>188. PLANO: planos coincidentes.</p> <p>189. CONTER: infinitos pontos de intersecção entre planos coincidentes.</p> <p>190. INFINITO: quantidade de pontos da intersecção entre dois planos coincidentes.</p> |
| <p>3.9.55 Ao analisar o termo <i>concorrentes</i>, ganha destaque a concorrência entre duas retas, o que indicou a necessidade de se analisar outras possibilidades e disposições, algumas propostas pelos próprios alunos. Nesse sentido, os alunos revelam novas compreensões possíveis quanto á intersecção e os elementos envolvidos.</p> | |

CENA 10 – DISCUTINDO ÂNGULOS

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISCUTINDO ÂNGULOS” | USG |
|--|---|
| <p>ISIS manifesta dúvida quanto ao ângulo determinado por duas retas, indicando uma possibilidade de valor para tal ângulo.</p> <p>ISIS questiona: posso dizer que duas retas concorrentes ... aqui o ângulo entre elas é menor que noventa?</p> <p>PP: pode ser noventa?</p> <p>ISIS: pode... pode ser maior também né?</p> <p>PP: pode ser maior? Então vamos ver quando pode ser maior. [PP pede que represente com os canudos duas retas concorrentes]</p> <p>ISIS: a não sei... pode ser noventa, né?</p> | <p>191. ÂNGULO: ângulo determinado por duas retas concorrentes.</p> <p>192. RETA: duas retas concorrentes determinam um ângulo.</p> <p>193. PERPENDICULARIDADE: referência ao ângulo reto para expor sua compreensão.</p> <p>194. RETA: possibilidade de duas retas determinarem um ângulo reto.</p> <p>195. PERPENDICULARIDADE: referência ao ângulo reto para expor sua compreensão</p> <p>196. RETA: possibilidade de duas retas determinarem um ângulo reto.</p> <p>197. PERPENDICULARIDADE: referência ao ângulo reto para expor sua compreensão</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISCUTINDO ÂNGULOS” | USG |
|---|---|
| <p>PP: vamos supor noventa... agora vamos ver o maior.. [representa duas retas não perpendiculares]. Quantos ângulos foram formados em volta desse vértice, do ponto de interseção?</p> <p>Vários: quatro.</p> <p>PP: a gente tem quatro ângulos aí e tem que escolher um pra ser o ângulo entre as retas... qual é melhor eu escolher? O agudo ou o obtuso?</p> <p>ELVIS: o obtuso?</p> <p>ISIS: eu escolheria esse [aponta para o ângulo agudo]</p> <p>PP: por quê? Porque agudo? Porque Obtuso?</p> <p>ISIS expõe o modo como procedeu, indicando relação com a forma de traçar ou medir um ângulo com o transferidor.</p> <p>ISIS: ah não sei... Escolhi mais por causa daquele negócio... a gente sempre olha o ângulo de lá pra cá [gesticula como quem usa o transferidor para construir um ângulo e considera uma origem e o sentido anti-horário. Desse modo, o ângulo entre as retas seria o agudo]</p> <p>PP busca explorar as possibilidades de disposição do ângulo no espaço e por isso movimenta dois palitos indicando duas retas concorrentes.</p> <p>PP: mas a gente pode tá em qualquer lugar [faz a representação pelo espaço de forma que os alunos tenham que se mover para medir o ângulo]</p> <p>ISIS indica romper com o modo indicado por ela para medir um ângulo.</p> | <p>198. ÂNGULO: determinação de quatro ângulos entre duas retas concorrentes.</p> <p>199. RETA: na intersecção de duas retas concorrentes determinam-se quatro ângulos</p> <p>200. ÂNGULO: possibilidade de ser agudo ou obtuso o ângulo entre retas</p> <p>201. ÂNGULO: relacionando a medida do ângulo aos procedimentos com o transferidor</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISCUTINDO ÂNGULOS” | USG |
|---|--|
| <p>ISIS: hum não, mas eu posso de lá pra cá também...</p> <p>PP [dispõe a representação do ângulo formado pelas retas paralelo ao teto da sala]: qual que é o ângulo?... Você vai se mexer no espaço e vai vir aqui.. qual você vai escolher pra ser a medida do ângulo entre as retas? Os dois opostos são iguais...</p> | <p>202. ÂNGULO: modos de proceder para determinar o ângulo entre duas retas concorrentes no espaço</p> |
| <p>NILSON: todos são os ângulos entre elas...</p> <p>PP: mas só tem um que representa a medida do ângulo entre elas.. Qual é o melhor candidato, o que vocês acham?</p> | <p>203. ÂNGULO: os ângulos determinados na intersecção de duas retas são todos ângulos entre elas.</p> |
| <p>A maioria considera que o menor e alguns consideram o maior ângulo.</p> <p>ISIS: eu sinceramente não sei... (e indica o menor)</p> <p>PP se dirigindo para CLAUDIO que respondeu menor: por quê (o menor)?</p> | <p>204. ÂNGULO: possibilidade de ser agudo ou obtuso o ângulo entre retas.</p> |
| <p>CLAUDIO: eu sei lá... se fosse imaginar um ângulo aqui.. essa reta aqui.. [representa com dois canudos um ângulo de 45°] se fosse pegar o maior e falar: 90 mais um pouquinho aqui, 45° no caso ... se eu fosse olhar do lado de cá eu ia falar metade de noventa. (seus gestos indicam que ele verifica a possibilidade de “olhar” o ângulo dos dois lados determinado pelo plano que o contém, expondo sua compreensão de perspectiva do olhar a partir da posição do observador)</p> | <p>205. ÂNGULO: modos de proceder para determinar o ângulo entre duas retas concorrentes no espaço</p> <p>206. PERPENDICULARIDADE: referência ao ângulo reto para expor sua compreensão</p> <p>207. ESPAÇO: possibilidade de dispor-se por diferentes perspectivas frente ao focado.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISCUTINDO ÂNGULOS” | USG |
|---|---|
| <p>PP buscando compreender: tipo o ângulo que tá faltando? (...) mas pensa assim.. não pode ser zero o ângulo entre elas?</p> <p>[gesticulam positivamente]</p> <p>PP: e se eu pegar o maior, então eu pegaria 180?</p> <p>CLAUDIO: o que completa 90, sei lá... É mais fácil pegar o menor...</p> <p>PP ressalta a importância de se estabelecer uma <i>convenção</i> para a medida do ângulo entre as retas.</p> <p>PP: a gente tem que falar a mesma língua... Senão um fala 30 e o outro fala 150.. Tem que combinar...</p> | <p>208. ÂNGULO: modos de proceder para determinar o ângulo entre duas retas concorrentes no espaço</p> <p>209. PERPENDICULARIDADE: referência ao ângulo reto para expor sua compreensão</p> |
| <p>3.10.56</p> <p>A dúvida principia a discussão que avança na negociação da escolha daquele que seria o ângulo entre duas retas concorrentes. Revelam-se modos de proceder e analisar associados ao modo como se mede o ângulo com o transferidor e à possibilidade de se estar espacialmente em dois lados distintos frente a ele, mirando-o.</p> | |
| <p>PP sente necessidade de analisar também os ângulos entre dois segmentos, por isso busca esclarecer o termo.</p> <p>PP: Mas tem uma coisa que a gente não falou. O que é segmento?</p> <p>Vários: um pedaço da reta.</p> <p>PP: um pedaço de qualquer maneira? Eu posso cortar aqui e dizer que é segmento? [gesto com um canudo como se o cortasse em um só ponto]. Como que é?</p> <p>“Dois cortinhos”.. “Início e fim”... “Tem que ser limitado, com começo e fim”.</p> | <p>210. RETA: segmento como um pedaço da reta</p> <p>211. RETA: ênfase nas extremidades do segmento de reta</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISCUTINDO ÂNGULOS” | USG |
|---|---|
| <p>PP: então vamos supor que aqui não é uma reta.. que aqui é segmento [ênfatisa pois usou as mesmas tiras de e.v.a para representar a reta em explicação anterior] Aí eu falo pra vocês, qual que é o ângulo?</p> <p>PP representa um ângulo com as tiras e, movimentando as tiras, faz um giro de 270°. Solicita que indiquem o ângulo entre os segmentos. Move o ângulo pelo espaço da sala para que analisem como proceder para medi-lo.</p> <p>ISIS expressa dúvida: o de cima... o de fora...(aponta para a maior região determinada, a referente a 270°)</p> <p>PP: e se eu fizer assim [muda a posição] qual é o ângulo? O de dentro ou o de fora? [gestos apontando cada um]</p> <p>CLAUDIO: o de dentro é mais fácil...</p> <p>Vários: o de dentro</p> <p>PP para ISIS: e aí? Qual você escolheria?</p> <p>ISIS parece estar em dúvida</p> | <p>212. ÂNGULO: identificação do ângulo determinado por dois segmentos.</p> <p>213. ÂNGULO: modos de determinar o ângulo, indicando o mais fácil.</p> |
| <p>3.10.57</p> <p>Ao analisar o ângulo entre dois segmentos, a compreensão quanto ao seu valor inicialmente se dá ao acompanhar o giro realizado, depois se apoia na facilidade proporcionada ao escolher o ângulo interior, ou menor. A movimentação do ângulo pelo espaço revela a necessidade de escolha, visto que há duas possibilidades compreendidas entre 0 e 360°</p> | |
| <p>ISIS manifesta dúvidas e expõe uma informação que obteve sobre ângulo.</p> <p>ISIS [baixinho]: o de dentro... mas eu estava lendo hoje e tipo assim, o ângulo é quantos graus cabem dentro dele...</p> <p>PP: a medida do ângulo é isso... Mas o que é o ângulo?</p> | <p>214. ÂNGULO: modos de determinar o ângulo</p> <p>215. ÂNGULO: quantidade de graus que cabem no ângulo.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISCUTINDO ÂNGULOS” | USG |
|--|--|
| <p>ISIS: não é quantos graus cabem dentro dele não?</p> <p>PP: isso é a medida. [utiliza um canudo para exemplificar] Esse é um segmento... Quantos dedos cabem aqui? É a medida dele (gestos positivos)... Esse aqui é um ângulo, então cabem tantos graus dentro dele.. [gestos com uma representação de ângulo] O ângulo é uma coisa... a medida dele é outra.</p> <p>ISIS: e qual que é a diferença? (revela dúvida)</p> | 216. ÂNGULO: quantidade de graus que cabem no ângulo |
| <p>CLAUDIO: O ângulo diz da inclinação da reta...</p> <p>PP: sim, mas não é o ângulo ainda. Uma coisa é falar de você, é uma característica sua, por exemplo, você mede tanto. Tem um ângulo aqui [gestos]... se perguntar o que que é isso.. para uma criança de sexta série são dois palitos.</p> | 217. ÂNGULO: inclinação |
| <p>CLAUDIO: duas anteninhas.. (ri)</p> <p>PP: mas vamos fazer de conta que isso é um ângulo [representa com tiras de e.v.a] O que é o ângulo?</p> <p>ELVIS: tem várias descrições...</p> <p>PP: então me fala todas</p> <p>ISIS</p> | 218. ÂNGULO: duas anteninhas |
| <p>ISIS: é o ponto em que duas retas se encontram, tipo assim é formado por... sabe quando você sabe mas não sabe explicar? (tenta expor uma nova elaboração de sua compreensão, mas não finaliza)</p> | 219. ÂNGULO: ponto em que duas retas se encontram. 220. ÂNGULO: destaque para o vértice |
| <p>ELVIS: sabe outra coisa, porque na matéria de ARC (disciplina de desenho geométrico) a gente coloca a ponta seca, coloca aqui e cria a bissetriz [gesticula como que fazendo uma bissetriz com o compasso]</p> <p>PP: isso é uma construção a partir do ângulo... O que é o ângulo?</p> | 221. ÂNGULO: modos de determinar a bissetriz |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISCUTINDO ÂNGULOS” | USG |
|--|--|
| <p>ISIS: O ângulo é formado por.. tipo assim, você tem essas semirretas aqui.. esse ponto é um ponto que elas têm em comum.. É a abertura.. Eu não sei explicar...</p> | <p>222. ÂNGULO: destaque para o vértice</p> |
| | <p>223. ÂNGULO: abertura</p> |
| <p>CLAUDIO: se eu adotar esse ângulo, dependendo pra onde ele for aqui [gestos como que estendendo as semi retas que o determinam], vai aumentando.</p> | <p>224. ÂNGULO: prolongamento dos lados</p> |
| <p>PP expõe a situação de uma criança de querer medir o ângulo. Pega dois esquadros e afirma que o desenho na lousa com o esquadro de madeira deve ser igual ou proporcional ao do aluno, de plástico. Sobre põe os ângulos de 90° dos esquadros e pede que verifiquem o encaixe dado na sobreposição.</p> | |
| <p>CLAUDIO: um tem que caber dentro do outro.</p> | <p>225. ÂNGULO: sobreposição de ângulos congruentes</p> |
| <p>PP: mas o que é ângulo?</p> | |
| <p>CLAUDIO: a distância dos lados... [gesticula como se fosse a distância entre pontos das semirretas, ou lados do ângulo, apontando para a região interior ao ângulo]</p> | <p>226. ÂNGULO: distância entre os lados</p> |
| | <p>227. DISTÂNCIA: região interior aos lados de um ângulo.</p> |
| <p>ELVIS: pode falar o seguinte, que ângulo é uma abertura formada por dois lados, uma reta que concorre com a outra, uma abertura qualquer.</p> | <p>228. ÂNGULO: abertura</p> |
| <p>PP: vamos voltar no que ele (CLAUDIO) falou: é a distância. Mas se eu falar isso, qual é a distância entre as duas aqui? [gesticula apontando as semirretas que determinam o ângulo]</p> | |
| <p>ELVIS: tem um ponto em comum..</p> | <p>229. ÂNGULO: destaque para o vértice</p> |
| <p>PP: Qual é a distância entre essas duas semi retas?</p> | <p>230. DISTÂNCIA: região interior aos lados de um ângulo.</p> |
| <p>ISIS: é o ângulo</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISCUTINDO ÂNGULOS” | USG |
|--|--|
| | 231. ÂNGULO: distância entre os lados. |
| <p>3.10.58 Diversidade de compreensões quanto ao conceito de ângulo, revelados no decorrer da discussão conjunta. Ao destacarem o termo distância, não se atentam para a distância entre as semirretas, já que elas se interceptam e portanto a distância é nula. O foco é o ângulo e o termo distância ganha outro sentido frente à medida da abertura associada ao ângulo.</p> | |
| <p>PP destaca para o termo distância, como discutido em encontros anteriores.</p> <p>PP: mas a distância entre as semirretas é a menor distância entre elas. Qual é aqui?</p> <p>ISIS: o ponto?</p> <p>PP: e quanto mede?</p> <p>Vários: zero</p> <p>ELVIS: a boca né? A boca dele...</p> <p>PP: a região entre... [gestos mudando a posição do ângulo pra tentar exemplificar] essa região está entre? [aponta para região de fora do ângulo]. Qual o maior valor que o ângulo pode ter do jeito que a gente definiu?</p> <p>ISIS: 180° (...) Então esse é o ângulo, ou é a medida?</p> <p>CLAUDIO: então o ângulo é essa área?</p> | <p>232. DISTÂNCIA: o ponto como a menor distância entre semirretas de mesma origem.</p> <p>233. DISTÂNCIA: distância nula entre semirretas de mesma origem.</p> <p>234. ÂNGULO: destaque para a “boca”</p> <p>235. ÂNGULO: quantidade de graus que cabem no ângulo.</p> <p>236. ÂNGULO: área interna ao ângulo</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISCUTINDO ÂNGULOS” | USG |
|--|--|
| <p>PP: pode usar também região, porque ó, não termina. (PP atenta que, por ser ilimitada, pode-se usar o termo <i>região</i>)</p> <p>ISIS: mas se você tá olhando esse dois negócios (aponta os pedaços de e.v.a representando as semirretas, ou lados do ângulo) teria que ser limitado, não?</p> <p>PP: mas essa área é limitada ou não?</p> <p>CLAUDIO: se eu pegar, pra análise num plano (pausa e observa do desenho que faz no papel)... se ele forma um ângulo e eu estou falando em relação com essa reta e com essa, se eu falar que é essa área toda aqui, talvez foge aqui, não? (faz um gesto, apontando para fora das semirretas do ângulo que desenhou, em suas extremidades). É assim [gesticula sobre a figura do ângulo, indicando como se a área determinada estivesse fora da região entre as semirretas que determinam o ângulo]</p> <p>ISIS: mas aqui, por exemplo, vou colocar só esse aqui, esse aqui que é a área né? [aponta para o desenho]</p> <p>PP: tem canetinha aí, representa a área.</p> <p>ISIS: mas ia pegar até aqui ou nesse ponto sai (pinta a região entre os segmentos. Quando o lado desenhado termina, ela pinta o exterior do ângulo)</p> <div data-bbox="502 1323 758 1512" style="text-align: center;"> </div> <p>PP ressalta: mas isso aqui [aponta para os lados dos ângulos] é um segmento ou uma semirreta?</p> <p>Vários: semirreta.</p> <p>PP: e na definição, vai embora também (gestos de continuação das semirretas)</p> <p>ISIS manifesta compreensão</p> <p>ELVIS: continua e esse desenho aqui também continua (indica os lados do ângulo).</p> | <p>237. ÂNGULO: limitação dos lados de um ângulo.</p> <p>238. ÂNGULO: limitação dos lados de um ângulo.</p> <p>239. ÂNGULO: área ilimitada para além das semirretas, ou lados do ângulo.</p> <p>240. ÂNGULO: área interna ao ângulo</p> <p>241. ÂNGULO: limitação dos lados do ângulo.</p> <p>242. ÂNGULO: área ilimitada para além das semirretas, ou lados do ângulo.</p> <p>243. ÂNGULO: evidência quanto à continuidade dos lados do ângulo.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISCUTINDO ÂNGULOS” | USG |
|--|--|
| <p>CLAUDIO se mostra surpreso com a ideia de infinitude, como em outro encontro.</p> <p>CLAUDIO: engraçado esse negócio (...) mas chegando infinito, e aí? Continua? Volta? Como que acontece?</p> <p>ISIS: por isso que geometria é tão difícil...</p> | <p>244. RETA: infinitude da semirreta.</p> <p>245. INFINITO: possibilidade de se estender indefinidamente</p> <p>246. INFINITO: dificuldade de explicação.</p> |
| <p>3.10.59</p> <p>O termo <i>distância</i> revela compreensões comuns a serem negociadas. O termo <i>área</i> indica a região entre os lados que são semirretas e portanto infinitas, indicando sua infinitude. Há uma retomada de significados buscando convergências para a ideia de ângulo.</p> | |

CENA 11 – RETOMANDO CONCEITOS

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO CONCEITOS | USG |
|--|---|
| <p>Continuamos a análise dos conceitos geométricos.</p> <p>PP: e paralelos? O que significa paralelo? ... Quando duas coisas são paralelas?</p> <p>INGRID: quando distam... quando têm a mesma distância entre si (indicando a região entre dois palitos paralelos)</p> <p>CLAUDIO: é quando essa área de dentro é a mesma..[gesto no desenho indicando a região entre as retas]</p> | <p>247. DISTÂNCIA: região entre duas retas paralelas.</p> <p>248. PARALELISMO: mesma distância</p> <p>249. DISTÂNCIA: manutenção da distância entre duas coisas paralelas.</p> <p>250. PARALELISMO: área entre duas coisas paralelas.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO CONCEITOS | USG |
|--|---|
| <p>Vários: inclinação é a mesma.. equidistantes...</p> <p>SANDRO: quando dois pontos distintos possuem... é... (não conclui sua compreensão)</p> <p>ISIS: não tem ponto em comum.</p> <p>SANDRO: quando dois pontos distintos são.. é.. (novamente não conclui)</p> <p>CLAUDIO: quando essa área...</p> <p>NILSON continua com o termo distância indicando a região entre as retas.</p> <p>NILSON: se ela continuar [gesto indicando prolongamento de duas retas] a distância aqui entre essas retas tem que ser sempre a mesma...</p> <p>PP considera estar compreendendo o que eles querem expor, mas atenta para o uso dos termos.</p> <p>CLAUDIO insiste na impossibilidade de inclinação das retas se forem paralelas e faz uma retomada mais cuidadosa das afirmações anteriores que abordavam o termo distância.</p> <p>CLAUDIO: se tiver a inclinação o mínimo que ela seja, no infinito ela encontra.. Se a distância de um ponto de uma das retas até a outra é sempre a mesma.. Aí são paralelas. [gestos apontando compreensões a partir do desenho de duas paralelas]</p> | <p>251. PARALELISMO: mesma inclinação</p> <p>250. PARALELISMO: mesma distância.</p> <p>252. PARALELISMO: impossibilidades de intersecção.</p> <p>253. PARALELISMO: área entre duas coisas paralelas.</p> <p>254. PARALELISMO: mesma distância</p> <p>255. PARALELISMO: mesma distância entre si</p> <p>256. PARALELISMO: mesma inclinação</p> |
| <p>3.11.60</p> <p>O termo paralelo revela diversas noções associadas, que convergem para a compreensão do conceito. Distância, área, inclinação buscam dar conta de explicitar as compreensões dos alunos, mesmo que, do modo como são abordados matematicamente, não sejam apropriados.</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO CONCEITOS | USG |
|--|--|
| <p>ISIS atenta para outra possibilidade</p> <p>ISIS: e no caso de uma (reta) sobre a outra?</p> <p>PP: aí são paralelas coincidentes... E reversa? Tem ponto em comum?</p> <p>Gestos negativos</p> <p>PP: por isso falar apenas que as retas não tem pontos em comum, então elas podem ser paralelas ou reversas... Quando são reversas?</p> <p>ISIS: quando tem um ângulo diferente de 90°? (relaciona o ângulo entre retas reversas como sendo diferente de 90° e parece considerar que retas ortogonais são um caso a parte, e não as considera como reversas entre si)</p> <p>PP: pode ser 90°?</p> <p>ISIS: aí é ortogonal.</p> <p>PP: ortogonais são reversas?</p> <p>Gestos positivos dos demais alunos.</p> <p>PP: pode ser qualquer ângulo entre retas reversas? (gestos positivos)</p> <p>ISIS: não são paralelas...</p> <p>PP complementa a fala de ISIS: não se tocam e não são paralelas.</p> | <p>257. INTERSECÇÃO: sobreposição de retas</p> <p>258. PERPENDICULARIDADE: referência ao ângulo reto para expor sua compreensão.</p> <p>259. RETA: retas ortogonais como não reversas.</p> <p>260. PERPENDICULARIDADE: ângulo reto</p> <p>261. RETA: reversas como não paralelas</p> |
| <p>3.11.61</p> <p>A análise de retas reversas indica atenção especial para retas ortogonais como um caso a parte e não como retas reversas. Esclarecido, busca-se uma explicação para retas reversas com base nas outras possibilidades de disposição entre retas.</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO CONCEITOS | USG |
|--|---|
| <p>SANDRO: se elas não são paralelas elas se tocam... Elas não são paralelas, elas vão se encontrar em um ponto (representa com palitos). Essas não são paralelas e se encontram (faz uma nova representação).</p> <p>ISIS: não, você tem que entender assim: paralela (gesticula com os palitos)... e que tem ponto em comum que é a coincidente [gestos indicando]. A reversa ela já não é paralela, ela pode ser qualquer coisa assim e ela também não pode ter ponto em comum [gestos com os palitos para representar retas reversas].</p> | <p>262. PARALELISMO: duas retas não paralelas se interceptam</p> <p>263. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> |
| <p>3.11.62 Para o aluno, as possibilidades de disposição de duas retas se restringem à situação plana, mesmo diante de toda a análise do R3 realizada anteriormente. A utilização dos materiais ajuda a colega a esclarecer as possibilidades.</p> | |

CENA 12 – BUSCANDO POSSIBILIDADES PARA A RETA

| DESCRIÇÃO DA CENA: BUSCANDO POSSIBILIDADES PARA A RETA | USG |
|--|--|
| <p>PP retoma a questão inicial: <i>Veja se sempre é possível encontrar uma reta paralela ao plano yz e perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto (fixo) dessa reta dada. (análise a unicidade (ou não) da resposta)</i></p> <p>Alguns respondem que sim (é possível)</p> <p>ISIS: pode, ué. (Usa o sistema de coordenadas que elaborou para explicar) meu plano é esse aqui e essa eu deixei como minha reta dada. E tem que ter outra reta que seja paralela a esse plano aqui e perpendicular à reta dada. Eu posso considerar um ponto fixo como qualquer ponto da reta?</p> <p>[PP faz gesto positivo]</p> <p>ISIS: então considero um ponto aqui. Assim daria.</p> <p>PP: Esse é um exemplo. Será que se essa reta dada estivesse de outro jeito, ainda assim seria possível? Será que existe um caso no qual não seria possível?</p> | <p>264. RETA: contem pontos</p> <p>265. PONTO: contido na reta</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: BUSCANDO POSSIBILIDADES PARA A RETA</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|--|
| <p>ISIS modifica a posição da reta, inclinando-a, buscando outras posições para a reta dada.</p> <p>PP volta-se para o grupo: procurem não deixar (a reta) só nas posições cômodas, como perpendicular e paralelas (aos eixos e planos).</p> <p>ISIS explica sua nova representação: vou colocar um pontinho (na reta), vou colocar um pontão, risos [usa canetinha para fazer a marca de um ponto no palito que representa a reta]. Vai do outro lado também [por causa da espessura do palito, ela destaca duas marcas para representar o ponto, como um “furo” no palito, revelando a dificuldade de representá-lo por meio dos materiais concretos a adimensionalidade do ponto]</p> <p>ISIS: está todo mundo enxergando?</p> <p>[PP pede que ela explique quem é quem, distinguindo pelas cores]</p> <p>PP: a reta fixa tem que ser sempre paralela ao plano...</p> <p>ISIS: então eu peguei a minha reta assim, porque se eu pegasse assim é fácil encontrar a resposta. (busca um posicionamento menos trivial para a reta dada, ou seja, não paralela aos planos e eixos coordenados, explicando os motivos da escolha ao grupo)</p> <p>NILSON expressa dúvida: mas aí já não está paralela. (aponta para a reta dada, observando o não paralelismo com o plano yz)</p> <p>ISIS explica: mas esse não tem que ser paralela (aponta e explica o que está sendo solicitado no enunciado)</p> <p>PP retoma o enunciado e a necessidade de buscar um caso que não seja possível, explorando as possibilidades.</p> | <p>266. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> <p>267. RETA: identificação de ponto na reta.</p> <p>268. PONTO: modo de representá-lo</p> <p>269. PONTO: passível de ser maior ou menor.</p> <p>270. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> <p>271. PARALELISMO: verificação de não paralelismo.</p> |
| <p>3.12.63</p> <p>O material revela alguns entraves para a compreensão de uma situação ideal envolvendo ponto, reta e suas dimensionalidades. No diálogo revelam-se modos de compreender nos quais destaca-se a necessidade de se imaginar a situação com ênfase para a tridimensionalidade dos materiais.</p> | |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: BUSCANDO POSSIBILIDADES PARA A RETA</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|---|
| <p>que não dá [mesmo entendimento que SANDRO].</p> <p>PP considera que o termo “sempre” foi um dificultador para a atividade.</p> <p>SANDRO: Engraçado, esse sempre...se é sempre, teria que ser sempre.</p> <p>PP: onde está o <i>sempre</i> na frase? o sempre se refere ao que? [pede que ele leia novamente o enunciado] O que eu quero ver se é possível?</p> <p>CLAUDIO: encontrar uma reta que satisfaça essas duas condições. Nesse caso vai ser sempre, né?</p> <p>SANDRO revela que como está compreendendo: num é um só, é sempre... [PP considera que a dúvida anterior se mantém]</p> <p>PP volta-se para a representação: considera um ponto da reta, tem infinitas retas que passam ali. Todas são perpendiculares? Passando pelo ponto preto, concorrentes (com a reta), quantas tem?</p> <p>ISIS: infinitas.</p> <p>PP: e que forma ângulo de 90? Quantas têm? [percebe que alguns têm dúvidas, e retira o sistema de coordenadas e mantém só a reta e o plano, pois ele parecia dificultar a visualização e a compreensão]</p> | |
| <p>ELVIS parece visualizar duas semirretas perpendiculares, separadas pelo ponto marcado e considera que são duas retas distintas.</p> | <p>275. RETA: cada uma das semirretas com origem no mesmo ponto como retas distintas.</p> |
| <p>ELVIS: tem duas [considerou os dois pedaços determinados a partir do ponto]</p> <p>Mas os colegas atentam que se trata da mesma reta.</p> | |
| <p>Vários: mas é a mesma, é uma só.</p> | <p>276. RETA: duas semirretas de mesma origem colineares determinam uma reta.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: BUSCANDO POSSIBILIDADES PARA A RETA | USG |
|--|-----|
| Mesmo concordando, PP considera que SANDRO ainda tem dúvidas quanto ao enunciado. | |
| <p>3.12.64</p> <p>O enunciado confunde o grupo e a palavra <i>possível</i> revela diferentes modos de interpretação para a questão proposta. A discussão coletiva permite que os sujeitos exponham compreensões e revejam o modo como compreendem o que é solicitado. O ponto marcado sobre o palito direcionou para a possibilidade e determinação de duas retas distintas, mas o próprio grupo evidenciou se tratar de uma única reta.</p> | |

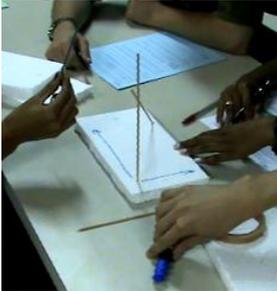
ENCONTRO 4

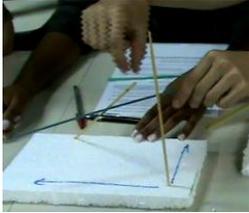
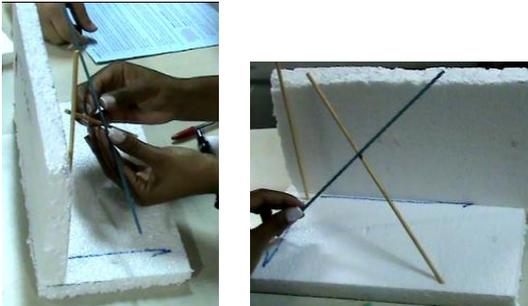
Foram retomadas as atividades, pois a resposta para muitas questões do encontro anterior não havia sido registrada e outras questões não foram analisadas. Os alunos chegaram ao longo da aula e se agruparam aleatoriamente, inicialmente formando dois grupos. Como de costume, havia diversos materiais sobre a mesa para que os alunos utilizassem, caso quisessem. Cada grupo, trabalhando separadamente do outro, utilizou isopor e palitos para analisar as questões propostas e outras que surgiram no decorrer do encontro seja por sugestão da pesquisadora-professora ou pelos questionamentos dos alunos.

CENA 13 – RETOMANDO A QUESTÃO

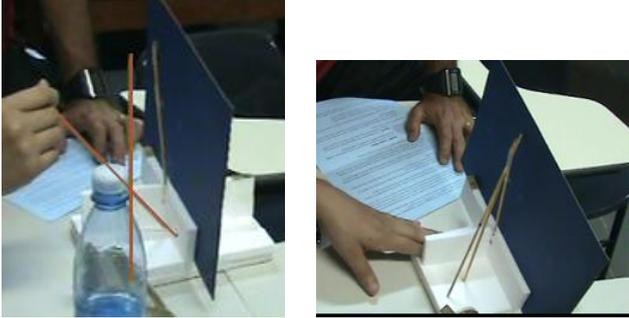
| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO A QUESTÃO | USG |
|---|---|
| <p>PP retoma a questão 1 do encontro anterior, que não havia sido finalizada: <i>Veja se sempre é possível encontrar uma reta paralela ao plano yz e perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto (fixo) dessa reta dada. (analise a unicidade (ou não) da resposta)</i></p> <p>SANDRO lê a questão para o seu grupo e pede que NILSON pegue a representação dos eixos pronta sobre a mesa para analisarem a questão. Eles utilizam o material para representar a situação proposta.</p> <p>SANDRO mexe os palitos: pode estar aqui no espaço (e movimenta o palito representando a reta).</p> | <p>277. RETA: possibilidades de disposição no espaço.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO A QUESTÃO | USG |
|--|--|
| <p>OLIVIA: muiiiiiiiiiito espaço.... Vocês viram o jornal falando que o espaço está se expandindo?</p> <p>SANDRO: está se expandindo mais rápido do que eles pensaram que estava se expandindo.</p> | <p>278. ESPAÇO: passível de conter uma reta</p> <p>279. ESPAÇO: em expansão.</p> |
| <p>4.13.65 Ao tematizarem o espaço o grupo traz uma atualidade relacionada sobre o tema em foco.</p> | |
| <p>ELVIS solicita pedaços de isopor para ANA, e INGRID chama PP, pois eles têm dúvidas.</p> <p>INGRID: como é que eu vou explicar? (e lê a questão)</p> <p>O grupo usa os materiais para tentar solucionar a situação e solicitam auxílio.</p> <p>PP: vocês lembram se é?</p> <p>ELVIS: não, era não. (apresentam uma resposta diferente daquela apresentada no encontro anterior)</p> <p>PP questiona, pois no encontro anterior a resposta à questão foi positiva: então me dá um exemplo de quando não é (um exemplo em que não é possível encontrar a reta solicitada).</p> <p>ELVIS: a questão é difícil de fazer a representação (revela dificuldade para representar o solicitado com o material)</p> <p>PP: mas na aula anterior vocês concluíram que sim. Que era possível sempre.</p> <p>O grupo começa a manipular palitos e isopor para analisar a questão e representam os três eixos com palitos.</p> <p>Usam um pedaço de isopor para representar o plano xy e INGRID espeta um palito no isopor para indicar o eixo z. PP altera a posição do palito (eixo z) para o canto para auxiliar na visualização.</p> | <p>280. RETA: possibilidades de disposição no espaço.</p> <p>281. SISTEMA DE COORDENADAS: modo de organização.</p> <p>282. SISTEMA DE COORDENADAS: representação com materiais concretos</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO A QUESTÃO | USG |
|--|---|
|  <p>PP marca no isopor os eixos x e y com a caneta e o grupo faz gestos positivos. Todos releem a questão.</p> <p>INGRID destaca elementos do enunciado da questão: <i>paralela a esse plano!</i></p> <p>PP: e quem é a reta dada? Onde ela tá?</p> <p>INGRID representa uma reta dada e PP alerta para as outras possibilidades.</p> <p>PP: a reta dada pode estar de qualquer maneira. Você pode pensar de um jeito, ele de outro. Vamos pensar esse caso. Agora eu quero que vocês encontrem a reta pedida (e entrega um palito azul para o grupo)</p>  <p>INGRID: paralela ao plano e perpendicular à reta dada, né (retomando as condições para a reta)</p> <p>O grupo faz um marca de caneta para representar um ponto na reta dada.</p> <p>PP solicita que atentem apenas na condição de ser ortogonal, pois nota certa dificuldade.</p> <p>PP: agora esquece que ela tem que ser paralela ao plano. Pensa só em ser ortogonal à reta dada. Quantas existem?</p> <p>INGRID: passando por esse ponto, tem essa aqui (e dispõe uma reta perpendicular à reta dada encostando no ponto feito com a marca de tinta sobre o palito).</p> | <p>283. RETA: possibilidades de disposição no espaço.</p> <p>284. PONTO: modo de representa-lo.</p> <p>285. PONTO: contido na reta.</p> <p>286. CONTER: Ponto contido na reta</p> <p>287. PONTO: contido na reta</p> <p>288. CONTER: reta</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO A QUESTÃO | USG |
|---|---|
| <p>A espessura do palito e a limitação da marca parecem dificultar a visualização de outras possibilidades. O ponto é marcado no lado que está no campo visual do grupo e isso parece dificultar que INGRID identifique as demais retas perpendiculares, já que poderiam estar do lado oposto à marca no palito.</p> <p>ELVIS parece compreender o entendimento da colega e intervém, buscando esclarece-la.</p> <p>ELVIS: ele (o ponto) tá aqui e tá atrás também (pega o palito azul e gira perpendicularmente ao redor da reta dada)</p>  <p>INGRID: ah! (revela clareza)</p> <p>PP retorna ao enunciado: agora além de (a reta) ser ortogonal (à reta dada) tem que ser paralela ao plano yz (usa outro pedaço de isopor para representar o plano yz).</p> <p>INGRID movimenta o palito buscando a ortogonalidade. Ao atentar para o paralelismo com yz, perde a perpendicularidade com a reta dada.</p> <p>Os colegas colaboram para que o esquema fique o mais próximo possível do desejado.</p>  <p>NOVAES se junta ao grupo e apresenta a sua compreensão para auxiliar a colega, trazendo uma situação contextualizada.</p> | <p>passando por um ponto</p> <p>289. PONTO: confusão advinda da sua impossibilidade de representação ideal</p> <p>290. PONTO: modos de interpretar a representação</p> <p>291. PERPENDICULARIDADE: modo de disposição no espaço.</p> <p>292. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade</p> <p>293. PARALELISMO: modo de disposição no espaço.</p> <p>294. PARALELISMO: manipulação de objetos buscando paralelismo</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO A QUESTÃO | USG |
|---|---|
| <p>NOVAES: Posso dar uma dica? É como se essa (a reta dada) fosse um eixo fixo e essa peça (a reta pedida) fosse uma barra que girasse. Pra ficar paralela tinha que ficar mais o menos aqui.</p> <p>O grupo faz gestos positivos.</p> <p>INGRID: chega uma hora que isso vai acontecer.</p> | <p>295. RETA: comparação a um objeto cotidiano.</p> <p>296. RETA: possibilidade de girar em torno de outra reta.</p> <p>297. PARALELISMO: mirando (para encontrar) o paralelismo.</p> |
| <p>4.13.66</p> <p>Após uma longa discussão, no encontro anterior, sobre a situação problema, as dúvidas ressurgem. As dificuldades são grandes em visualizar a reta solicitada e algumas dúvidas são as mesmas que pareciam estar esclarecidas. O apoio em situações contextualizadas auxilia na explicitação da compreensão ao cossujeito.</p> | |
| <p>Concomitantemente, outro grupo analisa o esquema que elaboraram para responder à mesma questão (o palito vertical representa o eixo z e a folha azul o plano yz).</p>  <p>O grupo parece esclarecido. Os alunos modificam a posição da reta dada e para cada caso identificam a reta buscada. Assim analisam diferentes posições para verificar possibilidades.</p> <p>ELVIS: aqui dá, aqui também dá... (mexe o palito que representa a reta dada e, a cada caso, dispõe outro conforme o solicitado na questão)</p> | <p>298. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> <p>299. PERPENDICULARIDADE: modo de disposição no espaço.</p> <p>300. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETOMANDO A QUESTÃO | USG |
|---|--|
|  <p>NILSON destaca o enunciado: tem que ser paralela ao plano yz e perpendicular a uma reta dada.</p> | <p>301. PARALELISMO: modo de disposição no espaço. 302. PARALELISMO: manipulação de objetos buscando paralelismo</p> |
| <p>4.13.67 O grupo mostra clareza ao retomar a questão do encontro anterior, apresentando facilidade para identificar a buscado.</p> | |

CENA 14 – PLANOS E RETAS REVERSAS

| DESCRIÇÃO DA CENA: PLANOS E RETAS REVERSAS | USG |
|---|---|
| <p>PP enuncia a primeira parte da questão 3: <i>Pense em duas retas reversas. Verifique se é possível encontrar um plano que as contenha (que contenha as duas).</i></p> <p>PP questiona: o que é conter? (retoma a o sentido de conter)</p> <p>NILSON: Se está dentro ...</p> <p>PP: totalmente ou só um pedaço?</p> <p>Vários: totalmente.</p> <p>PP: sempre é possível (encontrar tal plano)?</p> <p>SANDRO: nem sempre... Se elas forem concorrentes... mas já não serão reversas, se fossem perpendiculares também não seriam reversas...</p> <p>PP: e se elas forem ortogonais?</p> | <p>303. CONTER: estar dentro</p> <p>304. RETA: Possibilidades de disposição de duas retas. 305. PERPENDICULAR: referência ao ângulo reto para expor compreensão</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: PLANOS E RETAS REVERSAS | USG |
|---|---|
| <p>SANDRO: aí seriam reversas, mas não vai estar no mesmo plano...</p> <p>Muitos demonstram clareza de entendimento.</p> <p>PP retoma a segunda parte da questão: <i>e é possível encontrar dois planos paralelos entre si, cada um deles contendo uma dessas retas (reversas)?</i></p> <p>Os grupos começam a representar e fazer gestos positivos. Um dos grupos dispõe as retas ortogonalmente, de um modo que facilitava a identificação de dois planos verticais paralelos entre si, contendo cada um uma reta.</p> <p>PP modifica a representação para que fique menos evidente a possibilidade de encontrar tais planos. Então pede que verifiquem se ainda é possível.</p> <p>INGRID fica em dúvida, mas afirma: pode sim (usa um isopor sobre cada uma das retas de forma que eles ficam paralelos entre si, mas não mais verticais)</p> <p>Os demais confirmam.</p> | <p>306. RETA: Retas reversas não são coplanares</p> <p>307. PLANO: identificação de planos paralelos cada qual contendo uma reta reversa à outra</p> <p>308. PERPENDICULAR: referência ao ângulo reto para expor compreensão</p> <p>309. PLANO: identificação de planos paralelos cada qual contendo uma reta reversa à outra</p> |
| <p>4.14.68</p> <p>O material auxilia na busca dos alunos, e alguns conceitos são retomados, revelando clareza. Há ênfase em situações de ortogonalidade entre as retas e com o chão.</p> | |

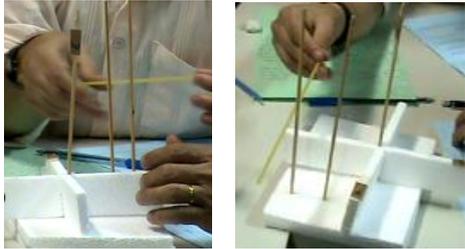
CENA 15 – RETA PERPENDICULAR A OUTRAS DUAS

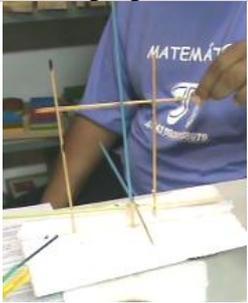
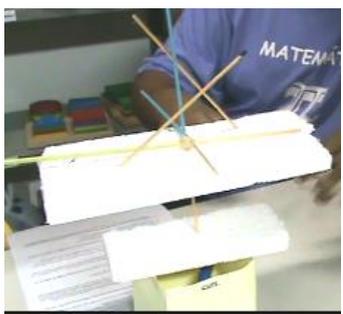
| DESCRIÇÃO DA CENA: RETA PERPENDICULAR A OUTRAS DUAS | USG |
|--|-----|
| <p>Iniciamos a discussão da questão: <i>É sempre possível determinar uma reta perpendicular (ao mesmo tempo) a outras duas retas dadas? (Examine cada situação em que podem estar essas duas retas dadas. Analise se a resposta é única – ou não – em cada caso)</i></p> | |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: RETA PERPENDICULAR A OUTRAS DUAS</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|--|
| <p>PP: essas duas retas dadas na cabeça de um está de um jeito, na de outro tá de outro. Então a gente tem que analisar todas as possibilidades. Quais são as possibilidades para duas retas?</p> <p>INGRID: várias! Assim (e dispõe dois palitos se interceptando), assim (e os coloca paralelos entre si)...</p> <p>ELVIS: perpendicular, paralelas,...</p> <p>PP: antes de começar eu gostaria que vocês analisassem o que poderia ser cortado desse enunciado que não faria diferença no seu entendimento.</p> <p>Vários: “Ao mesmo tempo”</p> <p>CAIO: “sempre possível” poderia ser só o possível.</p> <p>O grupo usa o material para expor uma situação. INGRID, CAIO e ELVIS manipulam os materiais e analisam um caso. Colocam dois palitos sobre a mesa se interceptando e o terceiro, partindo do ponto de intersecção e perpendicular ao plano da mesa.</p> <p>ELVIS prolonga uma das retas sobre a mesa com a ajuda da caneta e canudos, para auxiliar na compreensão.</p> <p>ELVIS: a nossa reta aqui continua.</p> <p>ELVIS pede a ajuda de PP em um dos casos que não havia compreendido. O seu grupo apresenta as situações. Quando PP faz a representação de duas retas reversas, prontamente CAIO representa com o palito azul uma reta perpendicular a ambas, satisfazendo a situação.</p>  <p>PP: porque esta (reta)? (questiona a solução representada por ele)</p> | <p>310. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> <p>311. PERPENDICULARIDADE: referência ao ângulo reto para expor compreensão</p> <p>312. RETA: prolongamento com os materiais, indicando continuidade.</p> <p>313. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETA PERPENDICULAR A OUTRAS DUAS | USG |
|---|---|
| <p>CAIO: porque essa se encontra com essa e com essa. (como as retas são reversas, CAIO parece visualizar a projeção de uma reta na outra para explicar o encontro de uma na outra)</p> <p>INGRID: e aqui está formando (90 graus)</p> <p>PP: parece que tá né? Não existe outra não? (questiona a unicidade).</p> <p>CAIO: não.</p> <p>PP: como vocês vão descrevê-la (a reta)?</p> <p>INGRID expõe sua compreensão, baseada no uso do material.</p> <p>INGRID: posso falar que em algum momento vou encontrar uma reta perpendicular às duas?</p> <p>PP: mas como vocês fizeram?</p> <p>PP representa duas retas reversas – amarelas – e movimenta uma terceira – azul –concorrentemente a ambas. Então, movimenta a reta azul, sempre perpendicular à reta amarela sobre a mesa.</p>  <p>O grupo visualiza a não perpendicularidade com ambas, mas apenas a uma das retas.</p> <p>INGRID: aí não. Mas uma hora fica perpendicular (ressalta a possibilidade de se encontrar uma perpendicular)</p> <p>PP: então vocês vão tentando melhorar? (a representação analisada)</p> <p>PP pede que eles olhem no segmento que liga as duas retas.</p> <p>CAIO: elas se cruzam (aponta para as retas reversas e seus gestos projetam ortogonalmente uma na outra, indicando uma intersecção. Seus gestos dão movimento às retas, eliminando a estaticidade que lhes é própria, buscando a intersecção da projeção de uma na outra.)</p> | <p>314.RETA: Projeção entre retas reversas</p> <p>315. ÂNGULO: destaque para o ângulo reto</p> <p>316. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade</p> <p>317. RETA: Projeção entre retas reversas</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETA PERPENDICULAR A OUTRAS DUAS | USG |
|---|---|
| PP questiona para provocar: mas elas não se cruzam. E aí? (atentando que as retas devem permanecer estáticas) | |
| 4.15.69 O material tem papel importante para a representação: a existência da reta buscada está relacionada à visualização possível pela manipulação. As retas reversas representadas ganham movimento a fim de determinar a perpendicular buscada. | |
| <p>OLIVIA, CARMEM, NILSON e SANDRO manipulam conjuntamente três palitos. OLIVIA coloca as duas retas dadas paralelas entre si e movimenta a terceira, girando-a, de forma que ela fica perpendicular a ambas.</p> <p>SANDRO: mas essa reta pode assumir qualquer posição (aponta para uma das retas dadas). Não diz que tem que estar as duas paralelas.</p> <p>OLIVIA: mas são paralelas na minha cabeça (expõe como imaginou as retas)</p> <p>SANDRO manipula o sistema de coordenadas do grupo e analisa o caso em que as retas são reversas e encontra uma perpendicular.</p> <p>SANDRO: Essa é quando forem reversas. (e dispõe a reta no esquema)</p>  <p>SANDRO: Se forem paralelas... (muda a representação dos palitos e movimenta o terceiro apresentando duas possibilidades, sendo que na segunda a solução é perpendicular a uma das retas apenas, e ortogonal à outra)</p> | <p>318. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> <p>319. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETA PERPENDICULAR A OUTRAS DUAS | USG |
|--|--|
|  <p>Por causa das representações acima, quando as duas retas dadas são paralelas o grupo conclui que <i>não é sempre possível determinar uma reta perpendicular a outras duas retas paralelas</i> (já que na segunda representação não está interceptando as duas retas paralelas).</p> | |
| <p>4.15.70 O material possibilita analisar as situações e também novas disposições para as retas e, diante do enunciado, novamente, a interpretação dos alunos leva a analisar inadequadamente a representação.</p> | |
| <p>CLAUDIO e NOVAES se unem na elaboração de um sistema de coordenadas com os palitos e durex para então representar as retas neste sistema. Na representação buscam apresentar todos os octantes, deixando o plano xy suspenso.</p>  <p>CLAUDIO espeta duas retas reversas no isopor e manipula outra. A partir daí, buscam encontrar a reta perpendicular a cada caso.</p>  <p>Usam um canudo pra prolongar uma das retas e melhorar a representação, auxiliando na observação.</p> | <p>320. SISTEMA DE COORDENADAS : representação com materiais concretos.</p> <p>321. SISTEMA DE COORDENADAS : divisão do espaço em 8 partes</p> <p>322.RETA: prolongamento com os materiais, indicando continuidade</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: RETA PERPENDICULAR A OUTRAS DUAS</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|---|
| <div style="text-align: center;">  </div> <p>Representam duas retas paralelas e indicam uma perpendicular a ambas e deslizam o palito ao longo delas, para representar as diversas retas perpendiculares às duas paralelas.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>CLAUDIO destaca o caso que consideram mais difícil: quando a reta é oblíqua.</p> <p>CLAUDIO: quando deita o palito fica mais difícil (modifica a sua representação para exemplificar).</p> <p>NOVAES explica o que intencionaram ao elaborar o sistema: Nós tentamos analisar acima e abaixo do plano (de isopor, ou plano yx).</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>PP questiona: nessa questão, faz diferença eu analisar ela perpendicular aqui (em cima) ou aqui (embaixo e gesticula)?</p> <p>Eles observam e concluem que não.</p> | <p>323. PARALELISMO: constatação de paralelismo entre as soluções possíveis</p> <p>324. INFINITO: quantidade de soluções para certo problema</p> <p>325. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> <p>326. SISTEMA DE COORDENADAS: representação com materiais concretos.</p> <p>327. SISTEMA DE COORDENADAS: modo como divide e organiza o espaço</p> |
| <p>4.15.71</p> <p>Usando o material, buscaram representar os diferentes casos em distintos espaços: abaixo ou acima do plano xy, dando destaque para as situações que consideram mais difícil de analisar. O material permite compartilhar modos de representar e os aspectos que os alunos buscaram destacar.</p> | |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: RETA PERPENDICULAR A OUTRAS DUAS</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|---|--|
| <p>PP inicia uma análise coletiva das respostas, a fim de compartilhar as conclusões dos grupos.</p> <p>SANDRO representa duas retas paralelas e movimenta uma terceira para mostrar que há infinitas perpendiculares a ambas.</p> <p>SANDRO: é um plano aqui (movimenta o palito, deslizando sobre as retas, como se o conjunto dessas infinitas retas perpendiculares a ambas determinasse um plano).</p> <p>Os alunos concordam que as soluções são todas paralelas.</p> <p>SANDRO considera que, de acordo com o modo como dispõe a terceira reta, ela pode não interceptar ambas. Representa o caso em que a terceira reta é perpendicular a uma e ortogonal a outra.</p>  <p>SANDRO: nesse caso não é!</p> <p>PP nota que a conclusão do grupo para a questão era negativa, ou seja, o grupo considera que nesse caso não é possível satisfazer o enunciado.</p> <p>Então PP se dirige para os outros grupos e retoma a questão. Pergunta se no caso de duas retas paralelas <i>é sempre possível encontrar uma terceira reta perpendicular a elas</i> e pede que analisem a representação de SANDRO.</p> <p>Os demais grupos gesticulam positivamente (indicando ser possível).</p> <p>NOVAES: não é sempre, mas você consegue achar pelo menos uma. Então é possível.</p> <p>SANDRO: se não é sempre então não é possível. (contraria a conclusão de NOVAES)</p> | <p>328. PARALELISMO: constatação de paralelismo entre as soluções possíveis</p> <p>329. INFINITO: quantidade de soluções para certo problema</p> <p>330. PLANO: Plano que contém as infinitas retas solução de um problema (todas paralelas entre si)</p> <p>331. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: RETA PERPENDICULAR A OUTRAS DUAS</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|--|
| <p>PP busca analisar a situação e o enunciado por partes e SANDRO efetua os procedimentos.</p> <p>PP: quem é dado? Você tem duas retas dadas paralelas.</p> <p>Então SANDRO retira a terceira reta do esquema.</p> <p>PP pergunta: essa aí (a terceira reta) é dada ou chega depois?</p> <p>Vários: depois.</p> <p>PP: então você vai tentar buscar uma que é perpendicular as duas ou que não é?</p> <p>CLAUDIO expõe sua compreensão: nem que seja uma vez só. Se for, é possível.</p> <p>PP: tem mais de uma solução neste caso? (questiona sobre a quantidade de retas que satisfazem ao solicitado)</p> <p>NOVAES: infinitas.</p> <p>SANDRO modifica a posição das retas dadas, mantendo-as paralelas, porém alterando a disposição (ou inclinação) em relação ao caso anterior.</p> <p>SANDRO: tem essa também (e inclina as retas dadas mantendo o paralelismo entre elas).</p> <p>CLAUDIO destaca que as duas situações representadas por SANDRO são análogas.</p> <p>CLAUDIO: mas aí você só mudou a posição (das retas paralelas). E tem infinitas soluções também.</p> <p>PP questiona o grupo de SANDRO: então porque vocês acharam que a resposta era “não”?</p> <p>NILSON: É questão de interpretação.</p> <p>SANDRO: nós interpretamos que qualquer reta que a gente pegasse para cruzar as duas (dadas), em qualquer posição, tinha que ser perpendicular às duas.</p> <p>PP: então uma coisa que a gente pode destacar no enunciado é “é sempre possível encontrar?”, ou, “é sempre possível determinar?”</p> | <p>332. INFINITO: quantidade de soluções para certo problema.</p> <p>333. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: RETA PERPENDICULAR A OUTRAS DUAS | USG |
|--|---|
| <p>4.15.72</p> <p>O enunciado novamente revela entraves na compreensão e os sujeitos buscam partilhar suas compreensões, negociando as interpretações, buscando consenso.</p> <p>Na continuação das soluções para a questão, INGRID explica o caso em que as retas dadas no enunciado da questão são concorrentes e CLAUDIO o caso em que são reversas.</p> <p>INGRID: como as duas estão se interceptando (aponta para a intersecção) vai ser nesse único ponto aqui. Não tem outro lugar que seja possível (ser perpendicular a ambas).</p>  <p>CLAUDIO explica como procederam no caso de as retas serem reversas e relaciona sua explicação com a de INGRID, destacando o significado de “sempre” no enunciado.</p> <p>CLAUDIO: porque a gente queria achar um ponto onde isto acontece, porque este <i>sempre</i> confunde a gente. <i>Sempre</i> o que? É <i>sempre</i>, se existir, se eu achar este ponto onde isto acontece. E esse ponto é aqui (projeta ortogonalmente uma reta na outra e aponta a intersecção, como na explicação anterior de INGRID). Mas este ponto existe aqui (retorna as retas para a posição inicial – como reversas – apontando para o ponto encontrado a partir da projeção de uma reta na outra). Este ponto satisfaz o exercício, é onde eu encontro uma reta perpendicular a ambas.</p> | <p>334. INTERSECÇÃO: um único ponto comum a duas retas:</p> <p>335. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade</p> <p>336. PONTO: intersecção de duas retas</p> <p>337. PROJEÇÃO: movimento de projeção ortogonal entre duas retas reversas</p> |
| <p>4.15.73</p> <p>Há uma retomada da expressão do entendimento dos sujeitos de forma a esclarecer o procedimento realizado por cada grupo. A reta ganha mobilidade, perde sua rigidez, para que seja possível explicar a compreensão da questão e determinar o ponto desejado de intersecção das retas com a perpendicular.</p> | |

CENA 16 – PROJETANDO RETAS REVERSAS

| DESCRIÇÃO DA CENA: PROJETANDO RETAS REVERSAS | USG |
|--|---|
| <p>PP aproveita a explicação de CLAUDIO e lê a próxima questão e dá destaque para a palavra <i>projetar</i>. Questão 5. <i>Considere duas retas reversas e paralelas ao plano xy. Projete cada uma delas ortogonalmente no plano xy. Comente sobre a posição relativa das projeções. Analise o ponto de intersecção das projeções.</i> PP questiona: o que é projetar?</p> <p>NILSON: transportar.</p> <p>PP: por exemplo, projetar uma sombra.</p> <p>ELVIS complementa a fala de PP: é como se eu pegasse e projetasse na parede. A sombra da mesa, a luz tá projetando ela no chão. Esse quadradinho (pega um cubo), aí a luz projeta a sombra dele.</p> <p>CLAUDIO ressalta que a projeção não é o objeto, como poderia parecer na afirmação de NILSON: mas aí não é o objeto, é a sombra (que é a projeção).</p> <p>VÁRIOS confirmam.</p> <p>PP pega o cubo e questiona sobre a imagem da sua projeção sobre a mesa, em diferentes posições. Os alunos acompanham atentos, respondendo a cada possibilidade sobre a imagem gerada (um quadrado, um retângulo, etc).</p> <p>PP: e o que é uma projeção ortogonal?</p> <p>OLIVIA: que não encostam (PP considera que ela associa <i>projeção ortogonal com retas ortogonais</i>)</p> <p>PP busca esclarecer: mas o que é projeção ortogonal? Pensa no sol do meio dia. Como vai ser a projeção no chão? qual é a incidência do raio?</p> <p>ELVIS: 90 graus.</p> <p>NILSON: se não for reto ele deforma (referindo-se à deformação da sombra do objeto)</p> | <p>338. PROJEÇÃO: transportar</p> <p>339. PROJEÇÃO: sombra</p> <p>340. PROJEÇÃO: ângulo reto</p> <p>341. PROJEÇÃO: possibilidades de deformação do objeto projetado</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: PROJETANDO RETAS REVERSAS</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|---|
| <p>Os alunos começam a manipular palitos e isopor, buscando analisar a questão.</p> <p>O grupo de ELVIS tem dúvidas e PP sugere que representem o plano e as retas e que imaginem o “sol” sobre elas. Imediatamente OLIVIA aponta para a sombra de uma estrutura de metal na parede da sala.</p> <p>INGRID movimenta a representação de duas retas ortogonais entre si, “descendo” as duas retas até o plano da mesa.</p> <p>INGRID questiona: vão ser perpendiculares (as projeções representadas no chão)?</p> <p>PP: sempre? Sempre as projeções serão duas retas formando 90 graus? Pensem: as retas reversas são sempre ortogonais entre si?</p> <p>OLIVIA: elas vão descer e sempre vai ter um ponto aqui (aponta para a intersecção). Serão sempre concorrentes.</p> <p>PP: e é 90 graus sempre?</p> <p>INGRID: nem sempre (demonstra clareza)</p> <p>PP: então o que eu posso afirmar é que elas vão ser sempre concorrentes (as projeções das retas reversas dadas)... Podem ser paralelas?</p> <p>INGRID: não! porque elas são reversas... não tem como...(considera tal possibilidade um absurdo)</p> | <p>342. PROJEÇÃO: sombra</p> <p>343. PROJEÇÃO: movimento de projeção até o chão.</p> <p>344. PERPENDICULARIDADE: destaque para a disposição perpendicular.</p> <p>345. PERPENDICULARIDADE: referência ao ângulo reto para expor compreensão.</p> <p>346. CONCORRÊNCIA: ponto em comum</p> <p>347. RETA: um ponto comum a duas retas concorrentes.</p> |
| <p>4.16.74</p> <p>O termo projeção ortogonal se confunde com o conceito de retas ortogonais, e o uso de situações envolvendo sombra são trazidos para a discussão. Ao exemplificar, retas que formam 90° entre si são destacadas, mas o diálogo possibilita uma análise menos restrita. A impossibilidade de certo resultado se enfatiza no absurdo de que tal fato venha a ocorrer.</p> | |

ENCONTRO 5

Foram retomados conceitos e questões trabalhados nos encontros anteriores e também apresentadas questões relacionando retas e planos perpendiculares e lugar geométrico. Novamente, alguns questionamentos foram suscitados no decorrer da discussão coletiva, no momento em que a professora-pesquisadora se atenta para a importância de se pensar, conjuntamente, certas possibilidades relacionadas a retas e planos. O material concreto se revela importante para as testagens, mas também um limitador para as conclusões. O que não se configurou como um problema, pois possibilitou aberturas de compreensões.

Para finalizar as atividades, os alunos foram convidados a elaborar uma questão relacionando as ideias e conceitos trabalhados até o momento. A imprevisibilidade dessa atividade, a elaboração de um problema e a busca por uma solução, bem como a exposição das ideias aos demais, permitiu compartilharem compreensões, numa retomada do que foi elaborado, mas já atentos às possibilidades abertas.

CENA 17 – CONCORRENCIA E INTERSECÇÃO

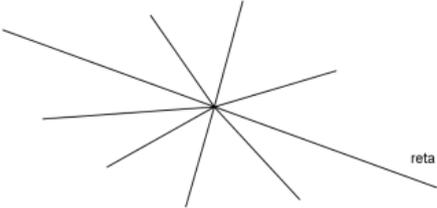
| DESCRIÇÃO DA CENA: CONCORRENCIA E INTERSECÇÃO | USG |
|--|---|
| <p>PP lê a seguinte questão: <i>Dado um plano e uma reta NÃO paralela a ele, haveria como determinar neste plano uma reta paralela a essa reta dada?</i></p> <p>CLAUDIO representa com palitos e isopor. Faz uma reta oblíqua ao plano e outra reta paralela a esta reta oblíqua: essa aqui (aponta para a segunda reta) está contida no plano.</p> <p>NILSON nota que a reta do colega apenas intercepta o plano: tem que tá toda no plano... não tá. Não é possível não.</p> <p>PP: ter intersecção não quer dizer que está contida.</p> <p>Alguns afirmam que a reta é concorrente (com o plano).</p> <p>CLAUDIO questiona se <i>concorrentes</i> devem ter um ponto de intersecção.</p> <p>PP pede que pense em dois planos concorrentes. Ele representa usando dois pedaços de cartolina.</p> <p>PP: tem um único ponto de intersecção?</p> | <p>348. CONTER: necessidade de a reta estar toda no plano</p> <p>349. CONCORRENTE : ponto em comum.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: CONCORRENCIA E INTERSECÇÃO | USG |
|---|---|
| CLAUDIO: não. Mas não tá todo nele (um plano no outro). Então não tá contido. | 350. INTERSECÇÃO: não estar todo contido |
| 5.17.75 Ao discutir o significado de intersecção adentram por temas como concorrência, número de pontos da intersecção e a possibilidade de estar ou ao contido. | |
| <p>Próxima questão: <i>Quantas são as retas perpendiculares a uma reta dada e que contém um ponto P (qualquer)? (analise as situações possíveis. Represente por meio de uma figura a situação. Verifique qual é o lugar geométrico determinado por essas retas).</i></p> <p>NILSON: esse ponto P tem que ser comum às duas retas? (revela dúvida quanto ao enunciado)</p> <p>PP: não tá dizendo que tem que ser... Está falando que ele tá na reta dada? Alguém contém P, quem?</p> <p>CLAUDIO: a reta perpendicular (a(s) reta(s) buscada(s)).</p> <p>Rapidamente notam que há infinitas soluções para o caso de o ponto P pertencer à reta dada.</p> <p>Vários: tem infinitas retas (no caso de P pertencer à reta dada)</p> <p>PP: e se o ponto (P) não estiver na reta dada?</p> <p>ELVIS representa uma reta com um palito. PP representa um ponto distante da reta e com um palito indica a outra reta, a reta procurada.</p> <p>PP: tá 90 graus?</p> <p>Os alunos fazem gestos negativos, pois não parecia estar perpendicular a representação.</p> <p>PP: como eu posso imaginar (a perpendicular)?</p> <p>OLIVIA olha do ponto até a reta.</p> | <p>351. PONTO: intersecção de duas retas</p> <p>352. INFINITO: quantidade de soluções para certo problema</p> <p>353. PERPENDICULARIDADE: visualização de disposição não perpendicular.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: CONCORRENCIA E INTERSECÇÃO | USG |
|--|--|
| <p>OLIVIA: fazendo uma projeção... Primeiro pegaria o ponto e uma reta nele até dar 90 (e indica como se mirasse do ponto na reta de ELVIS).</p> <p>PP: quantas retas têm?</p> <p>Alguns: uma.</p> <p>NILSON: depende da posição daquela de lá (da reta dada).</p> <p>PP interpreta que NILSON considera que, para cada posicionamento para a reta dada, há uma solução distinta.</p> <p>ELVIS: depende. Dali de onde ela tá olhando, está paralela (aponta o ponto). Tem que estar paralelo (indica o ponto e a reta)</p> <p>PP: mas existe um ponto que não seja paralelo à reta?</p> <p>CLAUDIO: ele (o ponto) tem que tá parado?</p> <p>PP: o ponto tá parado aqui e a reta parada lá.</p> <p>Ao final, todos concordam que há uma única perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto fora dela.</p> | <p>354. PROJEÇÃO: movimento mirando a projeção de um ponto em uma reta.</p> <p>355. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> <p>356. PARALELISMO: mirando (para encontrar) o paralelismo.</p> <p>357. PONTO: fixação de um ponto</p> |
| <p>5.17.76</p> <p>Questões envolvendo a quantidade de possibilidade revelam a busca dos alunos por movimentar os elementos envolvidos, procurando investigar outras disposições. Foi importante ressaltar aqueles elementos dados ou que devem permanecer estáticos.</p> | |

CENA 18 – AS RETAS PERPENDICULARES A OUTRA POR UM PONTO

| DESCRIÇÃO DA CENA: AS RETAS PERPENDICULARES A OUTRA POR UM PONTO | USG |
|---|-----|
| <p>Retomamos a questão anterior (que já havia sido resolvida) para que os alunos representassem a solução por meio de uma figura e verificassem qual é o lugar geométrico determinado <i>pelas retas perpendiculares a uma reta dada e que contém um ponto P (qualquer)</i>.</p> <p>PP interroga sobre o significado de Lugar Geométrico: o que é lugar geométrico, vocês conhecem algum?</p> | |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: AS RETAS PERPENDICULARES A OUTRA POR UM PONTO</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|---|--|
| <p>NILSON relaciona com uma disciplina cursada: eu ouvi falar disso aí na disciplina do semestre passado.</p> <p>PP exemplifica: o mais conhecido é o círculo. O que é o círculo? (e os alunos buscam caracteriza-lo)</p> <p>ELVIS: formado por vários pontos...</p> <p>OLIVIA: 360 graus? (e os colegas confirmam)</p> <p>ELVIS: não é alinhado...</p> <p>NILSON: mesma distância do centro?</p> <p>PP dá continuidade à questão: se vocês pegarem todas as retas que são perpendiculares à outra, por um ponto dessa outra, que figura vai formar? (silêncio) Façam a figura pra ver se ajuda.</p> <p>Em pequenos grupos eles buscam analisar as possibilidades. Giram um palito em torno de outro, perpendicularmente, a fim de representar a situação. Ficam em dúvida em como fazer a figura, ou representar por meio de um desenho.</p> <p>ISIS sugere uma possibilidade, dialogando com ELVIS.</p> <p>ISIS: é só fazer tipo um sol.</p> <p>ELVIS faz um desenho no papel e ISIS pede que ele especifique a reta dada e o ponto. Então ele vai até a lousa e faz o desenho para explicar sua ideia.</p> <div style="text-align: center;">  <p style="text-align: right; margin-right: 10px;">reta</p> </div> <p>ELVIS: é como se fosse uma estrela.</p> <p>PP questiona o caso de continuar a acrescentar retas perpendiculares</p> <p>PP: mas se tivesse infinitas retas no seu desenho, seria uma estrela?</p> | <p>358. CÍRCULO: Formado de pontos</p> <p>359. CÍRCULO: Possui 360°</p> <p>360. CÍRCULO: Não é alinhado</p> <p>361. CÍRCULO: Referência ao seu centro</p> <p>362. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: AS RETAS PERPENDICULARES A OUTRA POR UM PONTO</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|---|---|
| <p>ISIS imediatamente visualiza um círculo ao girar um palito, perpendicularmente, em torno de outro.</p> <p>ISIS: um círculo? (e gesticula indicando as retas ortogonais com o palito)</p> <p>PP atenta para a infinitude da reta, e que o palito era limitado.</p> <p>PP: mas cada reta é infinita...</p> <p>ISIS fica pensativa.</p> <p>PP: Vamos supor que você (ELVIS) continue a fazer isso (preencher com retas), o que aconteceria?</p> <p>ELVIS refaz seu desenho, acrescentando o máximo possível de retas, mas sem preencher uma região completamente. Há atenção dos colegas, que acompanham.</p> <p>CAIO retoma a ideia de ISIS: seria melhor fazer uma circunferência logo de uma vez.</p> <p>PP atenta que são retas e não segmentos. Muitos concordam e ficam pensativos. Representam a situação com palitos, girando um perpendicularmente em torno do outro.</p> <p>SANDRO: forma um plano. (revela clareza)</p> <p>Alguns concordam.</p> <p>ELVIS: mas como vai estar este plano? Pra lá, pra cá?</p> <p>SANDRO: contém tudo! (e gesticula na direção do desenho indicando toda a região preenchida com as infinitas retas, com gestos para todas as direções)</p> <p>PP: e ele (o plano) vai ser como em relação a essa reta?</p> <p>Alguns: Perpendicular.</p> | <p>363. CÍRCULO: Visualizado ao girar um palito, perpendicularmente, em torno de outro.</p> <p>364. CÍRCULO: Visualizado ao girar um palito, perpendicularmente, em torno de outro.</p> <p>365. PLANO: Plano que contém as infinitas retas-solução de um problema</p> <p>366. PLANO: Possibilidades de disposição no espaço</p> <p>367. PLANO: infinitude indicada nos gestos</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: AS RETAS PERPENDICULARES A OUTRA POR UM PONTO | USG |
|---|---|
| <p>ISIS pega um palito e gira, formando um círculo no espaço para explicar porque visualizou um círculo.</p> <p>ELVIS complementa: mas pega tudo...(indicando que visualizou a continuidade das retas)</p> <p>ISIS: a gente não enxerga a reta toda. (ressaltando a limitação do visualizado inicialmente)</p> | <p>368. CÍRCULO: Visualizado ao girar um palito, perpendicularmente, em torno de outro.</p> <p>369. RETA: continuidade indefinida.</p> <p>370. RETA: Verificação da impossibilidade de representação ideal.</p> |
| <p>5.18.77</p> <p>Ao ilustrar a situação, a limitação do material dá margem a diferentes interpretações que vão sendo reelaboradas na discussão, em meio aos questionamentos postos, avançando em uma compreensão coletiva, na qual buscam explicitar modos de agir e de compreender, fazendo referências à objetos e situações cotidianas.</p> | |

CENA 19 – PLANOS E RETAS

| DESCRIÇÃO DA CENA: PLANOS E RETAS | USG |
|---|---|
| <p>PP lê a questão: <i>Considere dois planos e duas retas, cada uma perpendicular a um deles. Represente todas as todas as situações possíveis. Se esses dois planos se interceptarem (mas não forem coincidentes), qual a relação entre as duas retas perpendiculares? Qual a relação entre as retas e a intersecção dos planos?</i></p> <p>CAIO questiona se precisa ser em relação aos planos coordenados.</p> <p>PP explica que não diz no enunciado que precisa ser em relação aos planos coordenados, e, portanto, pode ser qualquer um. Imediatamente eles buscam representar as situações com isopor e palitos espetados.</p> <p>INGRID dispõe dois pedaços de isopor com um palito fincado em cada um, perpendicularmente. Depois dispõe os planos articuladamente entre si e os movimenta (como abrindo e fechando um livro). Analisa as possibilidades, modificando a angulação entre os pedaços de isopor e apresenta para os demais.</p> | <p>371. SISTEMA DE COORDENADAS: Identificação de planos coordenados</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: PLANOS E RETAS | USG |
|---|--|
| <div data-bbox="387 300 858 555" data-label="Image"> </div> <p data-bbox="229 562 1011 703">INGRID: assim? (e movimenta sua representação para que os demais possam ver). Porque aí elas irão se interceptar (fica pensativa, pois ao mover os planos as retas não mais se tocam).</p> <p data-bbox="229 745 995 887">INGRID se dá conta de que as retas poderiam se tocar ou não. Ela movimenta o esquema de modo que os pedaços de isopor ficam coplanares. Os demais acompanham seus movimentos.</p> <p data-bbox="229 929 751 965">PP: Elas se interceptam? (vários negam)</p> <p data-bbox="229 1003 1011 1144">INGRID: mas pode (e modifica a sua representação para que as retas se toquem, dispondo em diferentes posições). E se eles (os planos) fossem paralelos, as retas também iam ser paralelas entre si (e representa este caso)</p> <p data-bbox="229 1256 1011 1330">PP: e no caso de planos perpendiculares, é um caso diferente desses (apresentados por INGRID)?</p> <p data-bbox="229 1368 906 1442">Muitos fazem gestos negativos e consideram que é equivalente ao caso em que planos são concorrentes.</p> <p data-bbox="229 1480 1011 1585">PP questiona: qual é o caso “mais geral” e qual é “mais específico”: Quando são concorrentes ou perpendiculares (os dois planos)?</p> <p data-bbox="229 1624 975 1729">CAIO destaca o que considera mais agradável ao olhar: tá mais “bonitinho” (aponta para os planos dispostos perpendicularmente)</p> <p data-bbox="229 1771 995 1845">INGRID analisa o esquema e destaca uma consequência no caso de planos perpendiculares.</p> <p data-bbox="229 1883 932 1957">INGRID: aí a reta que está perpendicular a um plano é paralela ao outro plano.</p> | <p data-bbox="1038 1003 1315 1218">372. RETA: possibilidades de disposição no espaço 373. PLANO: possibilidades de disposição no espaço</p> <p data-bbox="1038 1624 1362 1729">374. PERPENDICULARIDADE: Disposição mais “bonita”</p> <p data-bbox="1038 1883 1362 2063">375. PERPENDICULARIDADE: perpendicularidade decorrente da disposição de outros elementos</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: PLANOS E RETAS | USG |
|---|---|
| <p>PP: muito bom. Isso não é uma informação dada no enunciado, mas é uma consequência da forma como os planos estão.</p> <p>NILSON complementa a fala de INGRID: e as retas também não são perpendiculares entre elas, né? (destacando o ângulo e não a intersecção necessariamente)</p> <p>PP solicita que analisem a situação dos planos concorrentes e não perpendiculares.</p> <p>PP: cada um vai ter que fazer uma afirmação sobre as retas se os planos forem concorrentes.</p> | <p>376. PARALELISMO: decorrente da disposição de outros elementos</p> |
| <p>ISIS afirma: cada reta corta os dois planos. (atenta para a intersecção de uma reta no outro plano)</p> <p>PP questiona sobre a condição necessária para que ocorra o afirmado por ISIS.</p> <p>PP: é verdade, mas para que isso ocorra, qual é a condição? Que disposição dos planos não pode ser?</p> | <p>377. INTERSECÇÃO: reta cortando plano</p> |
| <p>NILSON: perpendiculares.</p> <p>Olhares confirmativos. Os alunos verificam que, no caso dos planos estarem perpendiculares um ao outro, cada reta ficaria paralela ao outro plano.</p> | <p>378. PERPENDICULARIDADE: modo de disposição no espaço.</p> |
| <p>INGRID expõe mais uma afirmação: elas podem se interceptar ou não. (olhares confirmativos dos demais)</p> <p>NILSON, ao expor uma afirmação sobre o proposto, destaca a intersecção das retas com os planos e fica pensativo.</p> | <p>379. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> |
| <p>NILSON: forma um ângulo de noventa com um plano e com o outro não (mas revela estar em dúvida pela restrição da afirmação de ISIS)</p> | <p>380. PERPENDICULARIDADE: referência ao ângulo reto para expor sua compreensão.</p> |
| <p>PP: se os planos não são perpendiculares, as retas podem formar 90 graus entre si? (fazem gestos negativos)</p> | |
| <p>SANDRO dá destaque para um caso particular, quando os planos se dispõem coplanares, ou coincidentes.</p> | <p>381. PLANO: possibilidades de disposição no espaço</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: PLANOS E RETAS | USG |
|--|--|
| <p>SANDRO: não pode ser 180 também.</p> <p>PP movimenta o esquema para indicar uma abertura de 180 graus. Os palitos ficam paralelos. Alguns alunos destacam que os planos ficam paralelos também, mas não se manifestam quanto à determinação de planos coincidentes ou idênticos.</p> <p>PP: vamos analisar com 90 graus (entre os planos). Como fica uma reta em relação ao outro plano?</p> <p>INGRID: paralelas.</p> <p>NILSON: uma (reta) não vai tocar o outro plano.</p> <p>SANDRO dispõe os pedaços de isopor e os palitos se tocando. Então movimenta um dos palitos, deslizando-o ao longo do outro e indica a visualização de um plano.</p> <p>SANDRO: essa reta está aqui, mas poderia estar aqui, aqui... Forma um plano (movimenta o palito laranja, deslizando ao longo do outro, indicando o plano determinado pelas duas retas ortogonais aos planos dados).</p>  <p>PP alerta que as retas poderiam se tocar ou não.</p> <p>PP questiona: se for como o SANDRO disse, o que eu posso afirmar sobre esse plano formado?</p> <p>ISIS: ele é perpendicular aos outros (planos dados).</p> | <p>382. ÂNGULO: Referência ao ângulo raso</p> <p>383. PARALELISMO: paralelismo decorrente da disposição de outros elementos.</p> <p>384. PARALELISMO: impossibilidades de intersecção.</p> <p>385. PLANO: visualização de um plano por duas retas que se interceptam.</p> <p>386. RETA: possibilidades de disposição no espaço</p> <p>387. PERPENDICULAR: perpendicularidade decorrente da disposição de elementos</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: PLANOS E RETAS | USG |
|---|---|
| <p>SANDRO volta-se para a representação e considera que são determinados dois planos. PP interpreta que ele considera que uma das retas divide o plano em dois, e que, portanto, haveria dois planos. ELVIS prontamente intervém, atentando que se trata do mesmo plano.</p> | |
| <p>5.19.78 A manipulação dos materiais auxilia na busca de possibilidades e na explicitação das compreensões aos sujeitos. Ao se atentarem para a generalização de afirmações sobre o enunciado, destacam os detalhes a que devem estar atentos diante das informações fornecidas.</p> | |
| <p>PP sugere a análise de uma situação não proposta nas atividades, por considerar importante diante da discussão surgida quanto à visualização de um plano perpendicular aos demais.</p> <p>PP: pensem um plano e uma reta perpendicular a ele. Quantos planos existem que contém essa reta?</p>  <p>Em coro respondem infinitas. INGRID gesticula indicando um giro em torno do palito.</p> <p>PP: o que posso afirmar desses planos em relação ao plano dado?</p> <p>SANDRO: pode ser paralelo ou perpendicular (indica como se visualizasse um plano na extremidade do palito e que é paralelo ao isopor. Alguns concordam)</p> <p>PP: esse plano contém a reta?</p> <p>SANDRO expressa confusão entre <i>conter</i> e <i>interceptar</i>.</p> | <p>388. INFINITO: quantidade de soluções para certo problema. 389. INFINITO: gestos indicando infinitude 390. RETA: Infinitos planos que a contém</p> <p>391. PERPENDICULAR: visualização de um plano ortogonal</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: PLANOS E RETAS | USG |
|--|---|
| <p>SANDRO: contém um ponto dela.</p> <p>PP: e isso é conter a reta?</p> <p>Todos se mostram atentos, respondendo negativamente, e revelam compreensão quanto ao termo conter. Afirmam que tal plano considerado por CAIO é perpendicular à reta.</p> <p>PP retoma o afirmado por ISIS: e porque os planos que contém a reta são ortogonais ao pedaço de isopor (ao plano)?</p> <p>ISIS: porque os planos contêm a reta e ela é perpendicular ao plano (dado).</p> <p>Diante do afirmado por ISIS, PP propõe que eles analisem o caso em que o palito não é perpendicular ao isopor. Pede que representem com os materiais as possibilidades para os planos que contém uma reta não perpendicular a um plano dado.</p> <p>PP: e se a reta não fosse perpendicular? Existem infinitos planos que a contém também, não é? (gestos afirmativos). Será que algum desses planos é perpendicular ao plano dado? (dispõe um palito obliquamente ao isopor). Olha essa reta, faz um ângulo diferente de noventa graus (com o isopor).</p>  | <p>392. INTERSECÇÃO: um único ponto comum entre o plano e a reta.</p> <p>393. PERPENDICULARIDADE: perpendicularidade decorrente da disposição de outros elementos</p> |
| <p>ELVIS: um ângulo obtuso.</p> | <p>394. ÂNGULO: possibilidade de ser agudo ou obtuso o ângulo entre reta e plano.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: PLANOS E RETAS | USG |
|--|---|
| <p>PP: agudo ou obtuso? Obtuso ou agudo? (há dúvida entre os alunos)</p> <p>ELVIS busca compreender o modo como PP foca o ângulo.</p> <p>ELVIS para PP: você está olhando para o lado de fora ou de dentro?</p> <p>PP: para qual você esta olhando (alguns risos). E vocês?</p> <p>PP retoma da discussão sobre ângulo e todos sinalizam para o ângulo agudo entre a reta e o plano representados.</p> <p>PP: voltando à questão. Dos infinitos planos que contém essa reta oblíqua ao plano dado, será que tem um que é perpendicular ao plano dado?</p> <p>INGRID explora o material e revela dúvida.</p> <p>INGRID: se o plano contém a reta e ela já não é perpendicular, então... Mas, não... eu acho que pode ter sim... porque no plano existem infinitas retas então pode (e gira uma folha, mantendo-a apoiada na reta, mas não visualiza tal plano). Num sei...</p> <p>SANDRO também tenta, mas não encontra tal reta.</p> <p>SANDRO: mas pode sim. Vira assim por lado. (manipula o papel tocando o palito, mas não visualiza uma possibilidade dele ficar ortogonal ao isopor).</p> <p>INGRID dispõe uma folha perpendicular ao plano da carteira e afirma: porque se deixar a folha assim não toca a reta (e fica pensativa)</p> <p>INGRID busca outra estratégia. ISIS também se arrisca em encontrar tal reta, mas fica em dúvida. Quando ISIS manipula a folha, INGRID vislumbra uma possibilidade, aproveitando a tentativa da colega. SANDRO faz sinal negativo, mas INGRID insiste no plano tocando a reta e perpendicular. ISIS apoia a ideia da colega.</p> <p>PP fornece uma cartolina para ISIS e INGRID, para que utilizem no lugar da folha pra ficar mais “firme” a representação. Os demais acompanham atentos.</p> | <p>395. ÂNGULO: modos de proceder para determinar o ângulo</p> <p>396. PERPENDICULARISMO: manipulação de objetos buscando perpendicularidade.</p> <p>397. PERPENDICULARISMO: manipulação de objetos buscando perpendicularidade.</p> <p>398. PERPENDICULARISMO: manipulação de objetos buscando perpendicularidade.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: PLANOS E RETAS | USG |
|---|--|
| <p>ISIS dispõe a cartolina perpendicular ao isopor e a movimentam até tocar o palito, sem que a perpendicularidade se desfaça. Todos aprovam a construção das colegas.</p> <p>PP manipula a cartolina representando diferentes planos e retoma a questão: então existe algum plano perpendicular a este e que contém essa reta que não é perpendicular ao plano? Quantos?</p> <p>Alguns: um.</p> <p>PP destaca a diferença entre o caso anterior, ou quando uma reta é perpendicular ou oblíqua ao plano dado, enfatizando o número de soluções em cada caso.</p> | <p>399. PERPENDICULARISMO: manipulação de objetos buscando perpendicularidade.</p> |
| <p>5.19.79</p> <p>A análise de uma situação indica a possibilidade de explorar outras investigações relacionadas e o material possibilitou que a construção se efetivasse. As tentativas e a persistência da aluna ao sentir que seria possível encontrar uma possibilidade para o interrogado foi apoiada pelos cossujeitos.</p> | |

CENA 20 – CRIANDO PROBLEMAS

| DESCRIÇÃO DA CENA: CRIANDO PROBLEMAS | USG |
|--|---|
| <p>PP solicita que os alunos criem uma situação problema envolvendo retas, planos e pontos. Em grupos eles buscam elaborar o enunciado, manipulando objetos a disposição.</p> <p>ELVIS explica sua ideia para PP: olha esse plano com a reta virada pra cá (movimenta um palito de forma que PP possa vê-lo, dispondo-o obliquamente a um dos lados do isopor).</p> <p>PP ressalta: ela precisava estar pra cá? Era para olhar esse plano e ver um isopor transparente. Da próxima vez eu vou trazer vidro, e não isopor (alguns risos). Porque se a reta está cortando aqui ela também está lá do outro lado, pois ela é infinita.</p> <p>Então ELVIS e ISIS apresentam a questão que criaram.</p> <p>ELVIS: dada uma reta concorrente a dois planos paralelos, é possível encontrar uma reta perpendicular a ela e concorrente aos planos?</p> | <p>400. RETA: limitada como o material que a representa</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: CRIANDO PROBLEMAS | USG |
|---|--|
| <p>ELVIS e ISIS dispõem dois pedaços de isopor paralelamente e um palito oblíquo a eles, representando a reta dada.</p>  <p>ELVIS propõe uma solução para a situação. Representa uma reta com um canudo, ortogonalmente à reta dada e tocando os dois pedaços de isopor.</p> <p>PP questiona o número de soluções: quantas retas satisfazem esse caso?</p> <p>INGRID usa os materiais para expor sua compreensão. Gesticula, deslizando o canudo paralelamente à reta solução encontrada, indicando que todas as soluções possíveis são paralelas e coplanares entre si.</p> <p>PP insiste: mas só existem as paralelas a esta? Elas têm que ser todas paralelas entre si?</p> <p>INGRID e ELVIS ficam em dúvida.</p> <p>INGRID: porque se não for paralela a essa não vai ser ortogonal à reta dada.</p> <p>PP pega um palito e gira perpendicularmente em torno do outro: quantas retas perpendiculares a essa têm aqui? (indica as retas e os alunos acompanham atentivamente)</p> <p>INGRID visualiza que há infinitas retas perpendiculares à outra não coplanares entre si. Porém revela dúvida.</p> <p>ISIS: mas se eu girar (muda a direção da reta) não vai tocar os dois planos. (ela volta-se para a representação do grupo, na qual a limitação do isopor e do canudo indica a não intersecção entre eles).</p> <p>CAIO atenta para a infinitude da reta e do plano.</p> | <p>401. PARALELISMO: disposição de objetos</p> <p>402. PARAPELISMO: constatação de paralelismo entre as soluções possíveis</p> <p>403. PLANO: que contém as infinitas retas-solução de um problema (paralelas entre si)</p> <p>404. RETA: limitada, como o material usado para representa-la.</p> <p>405. PLANO: Limitado como o material que o representa</p> |

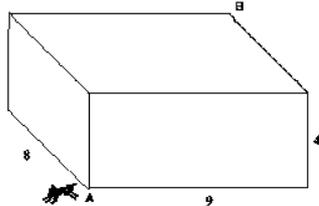
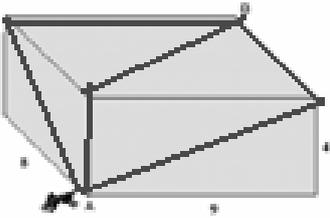
| DESCRIÇÃO DA CENA: CRIANDO PROBLEMAS | USG |
|--|---|
| <p>CAIO: mas o plano continua, né.</p> <p>INGRID: se for rodando assim (gesticula mudando a direção do canudo e mantendo a perpendicularidade com o palito oblíquo aos pedaços de isopor), vai tocar (gesticula indicando a infinitude do plano)</p> <p>CAIO confirma a ideia de INGRID: o plano foi indo (gesto indicando a intersecção do plano com a reta, representados com o material)...</p> <p>CAIO considera que em algum momento a reta não irá interceptar os planos.</p> <p>CAIO: uma hora não vai dar, mas...</p> <p>PP: que hora que não vai dar?</p> <p>CAIO: quando ele sair (gestos indicando uma reta não tocando o isopor, ou seja, paralela a ele).</p> <p>PP pede que ele verifique em que situação não iriam se interceptar, pois isto ocorreria apenas se a reta oblíqua fosse perpendicular aos planos dados.</p> <p>PP gesticula indicando uma reta cortando os dois planos representados.</p> <p>Devido à limitação do canudo ELVIS usa um palito pra estender a reta para que todos visualizem a intersecção com os planos, destacando a infinitude da reta.</p> | <p>406. PLANO: algo infinito.</p> <p>407. PERPENDICULARISMO: modo de disposição no espaço.</p> <p>408. PLANO: algo infinito.</p> <p>409. PLANO: algo infinito.</p> <p>410. RETA: prolongamento com os materiais, indicando continuidade</p> |
| <p>5.20.80</p> <p>Ao criar uma situação problema os alunos refletem sobre as possibilidades de solução e coletivamente verificam novas possibilidades, que não são apenas aquelas similares à encontrada. A retomada conjunta de informações já discutidas guia as interpretações efetuadas. A manipulação, com destaque para as propriedades dos entes geométricos auxilia na discussão.</p> | |
| <p>SANDRO lê a questão que o seu grupo elaborou: dada uma reta paralela a um plano é sempre possível encontrar outro plano, concorrente e não perpendicular ao plano dado, que contenha a reta?</p> | |

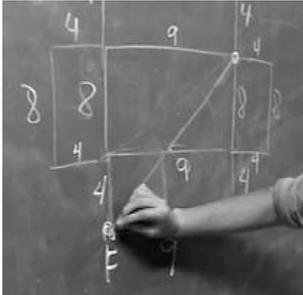
| DESCRIÇÃO DA CENA: CRIANDO PROBLEMAS | USG |
|--|---|
| <p>SANDRO representa um plano com o isopor sobre a mesa e uma reta com um palito amarelo paralelo à mesa. Então dispõe um segundo isopor perpendicular à mesa, destacando que ele não faz parte das soluções buscadas.</p> <p>SANDRO: esse a gente não quer.</p> <p>CAIO: é só você colocar (o plano) deitado que já contém e é concorrente (ao plano dado).</p>  <p>PP nota que novamente a palavra <i>sempre</i> leva SANDRO a dar destaque para os casos que não satisfazem o enunciado, ainda que, para a situação exposta, seja sempre possível encontrar uma solução para o solicitado.</p> <p>SANDRO: o único caso que não vai dar certo é se esse plano for paralelo a esse... ou se for perpendicular.</p>  | <p>411. PERPENDICULARIDADE: destaque para a disposição perpendicular.</p> <p>412. PLANO: Possibilidades de disposição no espaço</p> |
| <p>5.20.81 Ao elaborar a questão o grupo atenta para soluções menos convencionais, que saiam das posições comuns como perpendiculares e paralelas. O termo <i>sempre</i> leva a interpretações errôneas quanto ao buscado pelo grupo.</p> | |

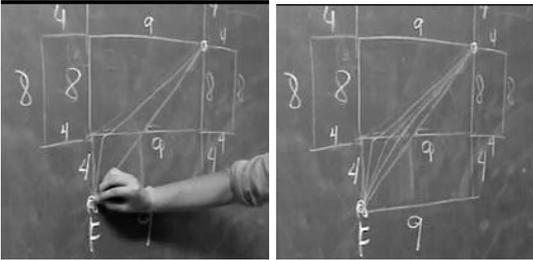
ENCONTRO 6

O objetivo central do encontro foi o de trabalhar a ideia de distância por meio de situações cotidianas e problemas que pudessem ser representados com os materiais, para então pensar possibilidades de se obter a distância entre os entes geométricos no espaço tridimensional. Vários materiais foram colocados à disposição dos alunos para auxiliar na descrição e análise.

CENA 21 – ANDANDO SOBRE A CAIXA

| DESCRIÇÃO DA CENA: ANDANDO SOBRE A CAIXA | USG |
|--|---|
| <p>Pensem na seguinte situação: uma formiga está no vértice A de uma caixa. O que ela fará para chegar ao vértice B, no qual está um torrão de açúcar?</p>  <p>Todos fizeram vários cálculos para determinar as diferentes distâncias percorridas, sempre considerando o deslocamento pelas arestas ou diagonais da face.</p>  <p>Os alunos fazem cálculos, usando o teorema de Pitágoras, para determinar a medida das diagonais da face da caixa.</p> <p>Concluem que em muitos casos o valor é o mesmo e indicam o menor que encontraram como sendo o caminho que a formiga realizaria.</p> <p>PP: e o que garante que esse é o menor valor?</p> <p>SANDRO: o menor é se atravessasse (e indica o segmento ligando A até B), mas... (considera a impossibilidade de a formiga fazer este percurso)</p> | <p>413. DISTÂNCIA: Diferentes percursos</p> <p>414. DISTÂNCIA: ênfase na linha(s) reta(s)</p> <p>415. DISTÂNCIA: Cálculo da medida</p> <p>416. DISTÂNCIA: possibilidade de existir a menor distância.</p> <p>417. DISTÂNCIA: menor segmento ligando elementos</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: ANDANDO SOBRE A CAIXA | USG |
|--|---|
| <p>PP: A gente tem que pensar qual é o menor caminho nas condições que se tem. Qual é a condição aqui? Tem que ser andando pela superfície da caixa. Imaginem essa caixa planificada. Se a caixa estivesse planificada ela iria fazer qual caminho para chegar de A a B? (PP faz um desenho representando a planificação da caixa na lousa)</p> <p>SANDRO traça no desenho da lousa a linha reta que liga a formiga ao ponto desejado</p> <p>SANDRO: ela vai mirar lá (no B) e chegar lá.</p>  <p>PP questiona a conclusão de SANDRO, quanto ao menor percurso.</p> <p>INGRID: se você pegar e esticar, você já vai ver que é maior. (considera a possibilidade de alinhar a trajetória anterior com a apresentada por ELVIS)</p> <p>SANDRO busca explicar sua conclusão, a partir do desenho planificado na lousa.</p> <p>SANDRO: quanto mais você for diminuindo... se ela vier daqui pra cá (e indica a trajetória considerada a menor no primeiro momento) ela é maior (que aquela que liga A e B). Aqui também (e representa outra trajetória que está entre essas duas). Mas vai tendendo pra essa reta que é a menor distância.</p> | <p>418. DISTÂNCIA: análise da viabilidade do percurso</p> <p>419. DISTÂNCIA: ênfase na linha(s) reta(s)</p> <p>420. DISTÂNCIA: menor segmento ligando elementos.</p> <p>421. RETA: mirando o alinhamento de dois pontos</p> <p>422. DISTÂNCIA: comparando distâncias</p> <p>423. DISTÂNCIA: comparando distâncias</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: ANDANDO SOBRE A CAIXA | USG |
|---|-----|
|  <p>PP: e como calcular a distância?</p> <p>Imediatamente eles utilizam o teorema de Pitágoras e calculam o valor solicitado, verificando ser menor que o anterior.</p> | |
| <p>6.21.82</p> <p>A situação proposta e a espacialidade da caixa indicam o menor caminho como sendo aquele que contém suas arestas. A planificação possibilita que visualizem uma nova solução que é comprovada pela desigualdade triangular, ainda que tal teorema não tenha sido tematizado nos encontros, sem que seja enunciado de modo matemático formalizado.</p> | |

CENA 22 – VIVENCIANDO DISTÂNCIAS

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO DISTÂNCIAS | USG |
|---|---|
| <p>PP retoma a discussão sobre o que é distância e sobre o seu cálculo. Sugere o exemplo da distância de Viçosa até uma cidade vizinha, Coimbra, e verifica a possibilidade desse valor ser variável ou não.</p> <p>PP dispõe dois objetos sobre a mesa: qual a distância entre eles?</p> <p>SANDRO afirma que podem ser várias e que depende de onde se percorre. CAIO discorda.</p> <p>PP considera a possibilidade de se dar uma volta para chegar de um objeto ao outro. Questiona e faz vários trajetos ligando um objeto ao outro.</p> <p>PP: qual seria a distância?</p> <p>CAIO: a reta. (indica um segmento reto ligando um objeto ao outro)</p> | <p>424. DISTÂNCIA: diferentes percursos</p> <p>425. DISTÂNCIA: ênfase na linha(s) reta(s)</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO DISTÂNCIAS | USG |
|--|---|
| <p>PP coloca um isopor entre os objetos, como se fosse um obstáculo que os separa e continua a indagar.</p> <p>PP: qual seria a distância agora? Qual seria a melhor?</p> <p>SANDRO: a mais viável...</p> <p>CAIO questiona se o isopor representa um plano infinito, ou não.</p> <p>CAIO: mas o isopor é infinito? (PP faz gesto negativo e explica que é mais um objeto no trajeto).</p> <p>CAIO e SANDRO propõem alguns caminhos contornando o obstáculo, o pedaço de isopor.</p> <p>PP: qual seria a melhor?</p> <p>SANDRO: depende das dimensões do isopor. (PP concorda)</p> <p>PP Mas e no espaço euclidiano?... o que é o espaço euclidiano?</p> <p>Os alunos expressam dúvida.</p> <p>SANDRO: o que Euclides criou.</p> <p>PP: e como ele é?</p> <p>SANDRO: não sei (ri)... números reais...</p> <p>PP: e plano cartesiano?</p> <p>SANDRO: com coordenadas e eixos ortogonais.</p> <p>PP pergunta para ELVIS e ISIS (que acabam de chegar): o que é distância pra vocês?</p> <p>ELVIS: você quer que eu responda como físico ou como matemático.</p> <p>PP: nos dois (risos). No que você quiser.</p> | <p>426. DISTÂNCIA: análise da viabilidade do percurso</p> <p>427. DISTÂNCIA: diferentes percursos</p> <p>428. DISTÂNCIA: cálculo da medida</p> <p>429. ESPAÇO: espaço euclidiano criado por Euclides</p> <p>430. ESPAÇO: relação do espaço euclidiano e números reais</p> <p>431. ESPAÇO: espaço coordenado.</p> <p>432. DISTÂNCIA: diferentes modos de ser concebida</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO DISTÂNCIAS | USG |
|--|---|
| <p>ELVIS: na física né, estou fazendo a disciplina (ri). Eu estou aqui em Viçosa e vou pra Ponte Nova ou Juiz de Fora... independente do ponto... do ponto final. É a trajetória do ponto final menos o inicial.</p> | <p>433. DISTÂNCIA: relação com fórmulas e termos da física</p> |
| <p>PP: independente da trajetória? Posso fazer a que eu quiser?</p> | |
| <p>ELVIS fica em dúvida.</p> | |
| <p>ISIS: é o espaço percorrido.</p> | <p>434. DISTÂNCIA: relação com fórmulas e termos da física</p> |
| <p>PP: espaço percorrido pra chegar lá? (ISIS confirma e PP continua a indagar). Qualquer espaço? Pode ter várias distâncias diferentes pra ir daqui a Juiz de Fora?</p> | |
| <p>ISIS: pode pegar uma distância maior e uma menor...</p> | <p>435. DISTÂNCIA: valor estimado.</p> |
| <p>PP: e qual você usaria?</p> | |
| <p>ISIS: vamos pegar outro exemplo. Daqui até no DCE. Você pode ir por cima, ou aqui por baixo (gesticula). São caminhos diferentes.</p> | <p>436. DISTÂNCIA: diferentes percursos</p> |
| <p>PP: caminhos diferentes, mas qual você pegaria?</p> | |
| <p>ISIS: depende do momento. Agora eu escolheria ir por cima porque é mais seguro (é noite e os colegas dão risada)</p> | <p>437. DISTÂNCIA: análise da viabilidade do percurso</p> |
| <p>PP: qual dos dois você iria escolher para representar a distância?</p> | |
| <p>ELVIS: pensa igual você faz no google. Você tá em Viçosa e quer ir para BH (descreve a trajetória das cidades indicadas no caminho e ISIS fica pensativa)</p> | <p>438. DISTÂNCIA: relação com mapas</p> |
| <p>CAIO: posso falar? (pequena pausa). É o menor caminho que você pode fazer dentro das limitações que ele tem.</p> | <p>439. DISTÂNCIA: menor caminho de acordo com as limitações.</p> |
| <p>PP retoma o exemplo dos dois objetos com um “muro” entre eles e ELVIS indica, com um palito, uma trajetória em torno do muro (sem tocá-lo) ligando os objetos. PP questiona se ele realmente andaria distante do muro como fez.</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO DISTÂNCIAS | USG |
|---|--|
| <p>ISIS: dependendo do muro, eu pulava (ri).</p> <p>PP: alguém faria diferente do que fez o ELVIS?</p> <p>CAIO afirma que faria diferente.</p> <p>ELVIS: se quer andar mais um pouquinho... (indicando o trajeto que propôs)</p> <p>PP: mas a questão não é se quer ou não. Se eu te perguntasse qual delas é candidata a ser a distância, qual seria?</p> <p>ELVIS fica pensativo e analisa a situação.</p> <p>CAIO considera que tem que ser a menor.</p> <p>ISIS afirma: é melhor “pular” o muro.</p> <p>PP pede a ISIS que represente aquela que considera ser a distância entre os objetos sobre a mesa e pede que compare com a de ELVIS.</p> <p>PP: está melhor que a de ELVIS? (gesto positivo)</p> <p>INGRID considera que é só contornar o muro. Seus gestos indicam um movimento tocando o contorno do muro.</p> <p>SANDRO: se aqui for um buraco (e aponta o fim da mesa), não dá pra vir mesmo por aqui. Então vem aqui, aqui e chega (e indica uma trajetória tocando o contorno do muro).</p> <p>PP: como eu sei se a dele é melhor que a de ISIS?</p> <p>SANDRO: medindo...</p> <p>PP retoma a discussão e o exemplo sobre distância de Viçosa à Coimbra (MG): o que foi considerado para ser de 20km?</p> <p>ISIS: a distância entre elas.</p> | <p>440. DISTÂNCIA: análise da viabilidade do percurso</p> <p>441. DISTÂNCIA: diferentes percursos</p> <p>442. DISTÂNCIA: possibilidade de existir a menor distância.</p> <p>443. DISTÂNCIA: diferentes percursos</p> <p>444. DISTÂNCIA: possibilidade de existir a menor distância.</p> <p>445. DISTÂNCIA: análise da viabilidade do percurso</p> <p>446. DISTÂNCIA: cálculo da medida</p> |

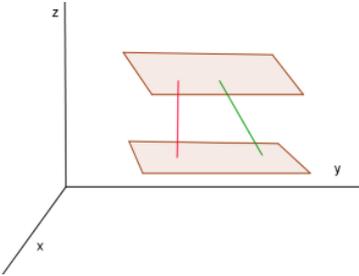
| DESCRIÇÃO DA CENA: VIVENCIANDO DISTÂNCIAS | USG |
|--|---|
| <p>PP: e essa distância fui eu quem decidiu? Poderia ser menor?</p> <p>ISIS: a distância é a mesma, mas o tempo poderia ser menor.</p> <p>PP: mas o tempo não nos interessa agora, só o percurso.</p> <p>INGRID: poderia ser menor se tivesse outro caminho melhor.</p> <p>ELVIS: poderia ter um obstáculo no caminho, tipo algum animal, aí demora. (relaciona com o tempo, assim como ISIS).</p> <p>PP: mas aí é tempo... Alguém vai pra Juiz de Fora pra depois voltar pra Coimbra (MG)? Se você quiser ir lá, você vai pegar qual caminho?</p> <p>Alguns: o menor.</p> | <p>447. DISTÂNCIA: relação com o tempo</p> <p>448. DISTÂNCIA: diferentes percursos</p> <p>449. DISTÂNCIA: relação com o tempo</p> |
| <p>6.22.83</p> <p>A discussão sobre distância aponta para aspectos cotidianos, que se dão na empiria, diante da escolha de um caminho, sendo que a “melhor distância” aponta para aspectos relacionados ao para quem e em que condições. A determinação da variação de valores indica relação com a disciplina de física e o tempo também é considerado ao se discutir o melhor trajeto.</p> | |

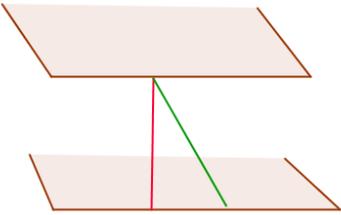
ENCONTRO 7

Foi retomada a discussão sobre distância e os aspectos envolvidos na sua determinação. O objetivo do encontro foi o de discutir modos de determinar a distância entre entes geométricos dispostos no espaço, buscando analisar os procedimentos e não os cálculos de distância previamente estabelecidos por meio de fórmulas. Ganhou destaque a confusão decorrente da representação na lousa de um sistema de coordenadas tridimensional: a impossibilidade de se manter a profundidade na figura plana, que é apenas representada por um jogo de perspectiva, levou a diferentes interpretações e reformulações. Utilizar os materiais concretos em conjunto com a figura da lousa evidenciou aspectos que acabam sendo desconsiderados ou que ficam confusos apenas com o desenho.

CENA 23 – PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS

| <p align="center">DESCRIÇÃO DA CENA: “PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS”</p> | <p align="center">USG</p> |
|---|--|
| <p>PP propõe uma questão quanto ao cálculo da distância entre dois planos paralelos ao plano xy e portanto perpendiculares ao eixo z: <i>Considere um sistema xyz em uma escala dada em centímetros. Imagine dois planos distintos paralelos ao plano xy. Como você calcularia a distância entre eles? (descreva os procedimentos e ilustre a situação)</i></p> <p>ISIS imediatamente manipula os objetos e expõe sua compreensão.</p> <p>ISIS: eu pensaria o seguinte, eu pegaria os dois planos aqui, colocaria uma reta (representa os planos com dois pedaços de isopor paralelos e a distância com um palito, indicando um segmento – mesmo tendo utilizado o termo <i>reta</i>).</p>  <p>PP não discute o uso do termo <i>reta</i> por considerar que os demais relacionaram ao segmento de <i>reta</i> que ISIS representa.</p> <p>PP: qualquer <i>reta</i>?</p> <p>ISIS: tem que ser uma <i>reta</i> específica? (os colegas observam sem responder). Tem que ser uma <i>reta</i> que corta os dois, né.</p> <p>PP se aproxima da representação de ISIS e dispõe um palito obliquamente aos planos. ISIS faz gestos negativos.</p> <p>ISIS: tem que ser uma <i>reta</i> assim (aponta para a sua).</p> <p>PP: assim como?</p> <p>ISIS: perpendicular.</p> <p>PP insiste: e porque não o meu?</p> <p>ISIS: mas não forma ângulo de noventa graus, forma?</p> | <p>450. DISTÂNCIA: menor segmento ligando elementos 451. RETA: menor distância</p> <p>452. CONCORRÊNCIA: cortar</p> <p>453. PERPENDICULARIDADE: destaque para o ângulo reto</p> <p>454. PERPENDICULARIDADE: modo de disposição no espaço</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: “PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS”</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|--|
| <p>PP: e precisa? (SADRO faz gestos negativos)</p> <p>ISIS: vamos supor que esses são os planos, aí eu pegaria uma reta que vai tocar os dois, como se fosse num ponto. Aí eu pegaria a distância desse ponto até esse ponto (e indica as intersecções da reta com os planos e o segmento determinado por elas).</p> <p>PP: mas então tanto faz pegar a sua reta ou a minha reta? Dá na mesma? (alguns fazem gestos negativos). Qual é a distância?</p> <p>ISIS: a menor.</p> <p>PP: por quê?</p> <p>CLAUDIO: parece ser a menor (aponta para o segmento perpendicular indicado por ISIS)... porque é a mais perfeita.</p> | <p>455. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância</p> <p>456. DISTÂNCIA: possibilidade de existir a menor distância</p> <p>457. PERPENDICULARIDADE: Disposição mais perfeita</p> |
| <p>7.23.84</p> <p>Intuitivamente a distância entre os dois planos paralelos é indicada pelo segmento perpendicular aos planos, por ser menos, mais perfeito segundo um sujeito. O termo <i>reta</i> é utilizado sem se atentar para a sua infinitude, pois dá conta de expressar o que a aluna visa expor, ou seja, o segmento de reta que liga os planos paralelos.</p> | |
| <p>ELVIS faz um desenho na lousa e PP aproveita a ilustração, indicando os segmentos na cor dos palitos usados: perpendicular é vermelho e oblíquo é verde.</p>  <p>SANDRO: mas eu acho que a distância é a mesma (com gesto indica que em qualquer ponto do plano a distância ao outro seria a mesma. Ele parece não se referir aos segmentos verde e vermelho).</p> <p>ISIS concorda e INGRID afirma que sim, pois os planos são paralelos.</p> | <p>458. DISTÂNCIA: é constante entre planos paralelos</p> |

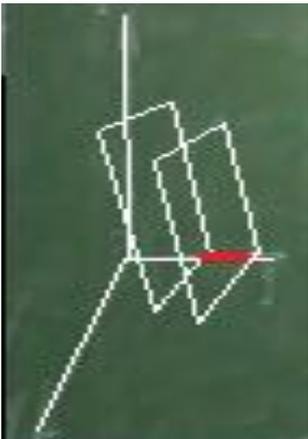
| DESCRIÇÃO DA CENA: “PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS” | USG |
|--|---|
| <p>PP nota a confusão de interpretação e que os alunos estão atentos à distância e não aos segmentos.</p> <p>PP: concordo que a distância tem que ser a mesma, mas eu quero saber se essa ou essa é a distância que vocês escolheram e porque (aponta para os segmentos verde e vermelho)</p> <p>Todos indicam o vermelho e SANDRO destaca que ele é menor. CLAUDIO considera que o ângulo parece de 90° então PP indica com o símbolo de 90° e pede que expliquem porque o segmento vermelho é menor.</p> <p>CAIO: estou imaginado assim, você descendo ele pra ficar igual (e gesticula com o antebraço como se rotacionasse o segmento oblíquo (verde) até sobrepor com outro). Aí ele vai ficar maior.</p> <p>ISIS: eu acho que é a mesma coisa, sinceramente... (fica pensativa). Se bem que sempre não é não, porque quando você inclina a reta você vai precisando de mais reta pra chegar nos pontos (e faz um gesto como se seu antebraço representasse o segmento se inclinando, como o gesto de CAIO)</p> <p>PP: faz outra representação na lousa, dispondo os segmentos em questão com um ponto de intersecção em um dos planos.</p>  <p>SANDRO prontamente questiona: isso aí é um triângulo não é?</p> <p>PP concorda. Eles verificam que se trata de um triângulo retângulo e identificam catetos e hipotenusa, e afirmam que a hipotenusa é maior.</p> <p>PP comenta: parece que cada um fez seu esquema buscando a menor...</p> <p>SANDRO: instintivamente .</p> <p>CLAUDIO: é a mais fácil.</p> | <p>459. DISTÂNCIA: comparando medidas</p> <p>460. DISTÂNCIA: comparando medidas</p> <p>461. DISTÂNCIA: a mais fácil</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS” | USG |
|--|--|
| 7.23.85 O desenho ganha movimento para justificar as medidas e ao focarem nas propriedades do triângulo retângulo os sujeitos buscam argumentações apoiadas nelas. | |
| <p>PP retoma a questão anterior e pede que investiguem como calcular a distância entre os planos.</p> <p>ELVIS: posso dar nomes? (indica o eixo z). $x1$ menos $x2$?</p> <p>PP: x? (indaga pois esperava $z1$ e $z2$)</p> <p>ISIS: eu pensaria de outra forma, posso desenhar? (vai até a lousa e fraciona o eixo z indicando uma escala de medidas). Eu calcularia isto aqui (indica a distância de um plano ao outro).</p> <p>PP considera que o modo de proceder de ISIS é análogo ao exposto por ELVIS, apesar dela enfatizar que era “de outra forma”.</p> <p>PP: como você iria fazer o cálculo?</p> <p>ISIS: eu ia contar os centímetros.</p> <p>PP: como?</p> <p>SANDRO complementa a ideia de ISIS: é a diferença?</p> <p>ISIS concorda: eu descobriria onde tá esse plano aqui. A distância desse plano menos desse (indica os pontos de intersecção dos planos com o eixo z)</p> <p>PP considera que ISIS tem que melhorar a sua explicação, para ser mais clara.</p> <p>ELVIS: tem a ver com os pontos onde corta os dois planos?</p> <p>CAIO faz gesto positivo</p> <p>ISIS: eu pegaria o ponto de intersecção da reta com o plano.</p> <p>ELVIS: as coordenadas.</p> <p>PP: qual o melhor lugar pra você pegar esta distância? (aponta para o desenho)</p> | <p>462. DISTÂNCIA: cálculo da medida.</p> <p>463. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância</p> <p>464. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância</p> <p>465. DISTÂNCIA: cálculo da medida</p> <p>466. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância</p> <p>467. CONCORRÊNCIA: A: cortar</p> <p>468. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS” | USG |
|---|--|
| <p>Os demais observam e alguns indicam que na interseção com o eixo z é melhor. ISIS revela compreensão e afirma que é onde as coordenadas x e y valem zero.</p> <p>PP indica a interseção dos planos com o eixo como $z1$ e $z2$ e pede que calculem a distância. Alguns dizem $z1$ menos $z2$ e outros $z2$ menos $z1$.</p> <p>CAIO indica o uso de módulo para resolver a situação para o cálculo da distância, para que o valor não resultasse em um número negativo.</p> <p>PP: e se os planos não fossem paralelos, qual seria a distância entre eles? (representa com isopor sem tocá-los, apenas indicando a inclinação de um em relação ao outro)</p> <p>SANDRO: no ponto de encontro.</p> <p>PP dispõe os dois pedaços de isopor se interseccionando: qual a distância?</p> <p>Em coro os alunos respondem zero.</p> | <p>469. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância.</p> <p>470. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância</p> <p>471. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância 472. DISTÂNCIA: valor positivo.</p> <p>473. DISTÂNCIA: nula</p> <p>474. DISTÂNCIA: nula</p> |
| <p>7.23.86 Ao investigar modos para se calcular a distância entre os planos, os sujeitos complementam suas expressões, que convergem para a mesma direção nos modos de agir.</p> | |

CENA 24 – POSSIBILIDADES ENTRE PLANOS PARALELOS

| DESCRIÇÃO DA CENA: “POSSIBILIDADES ENTRE PLANOS PARALELOS” | USG |
|--|-----|
| <p>PP solicita que investiguem como poderiam calcular a distância entre dois planos paralelos, mas dispostos de forma distinta em relação aos planos coordenados, ou seja, não paralelos a eles.</p> <p>PP desenha na lousa dois planos paralelos.</p> | |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “POSSIBILIDADES ENTRE PLANOS PARALELOS” | USG |
|---|---|
| <p>A representação na lousa deixa ISIS confusa e ela questiona se os planos estão um do lado do outro. ISIS dispõe dois pedaços de isopor um ao lado do outro de forma que os planos representados por eles são coincidentes. Fica pensativa analisando o esquema. PP: neste caso tem dois planos, né?</p> <p>Então ela se dá conta da impossibilidade do afirmado, diante da infinitude do plano. Conclui que os dois planos são o mesmo, já que o isopor é apenas uma representação limitada do plano.</p> <p>ISIS representa na lousa um sistema de coordenadas e dois planos paralelos entre si indicando seus pontos de intersecção com o eixo y e o segmento que os une (em vermelho). Afirma que a distância entre os planos é esse segmento. Muitos gesticulam positivamente</p> | <p>475. PLANO: limitado como o material que o representa</p> <p>476. PLANO: algo infinito</p> <p>477. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância</p> |
|  | |
| <p>PP: e essa é a melhor distância? (muitos fazem gestos positivos)</p> <p>SANDRO: porque a distância entre dois planos é sempre a mesma se eles são paralelos entre si, essa é uma delas.</p> <p>ISIS usa dois pedaços de isopor e um palito e com a ajuda de PP representa o que esboçou na lousa.</p> <p>SANDRO destaca que os planos irão interceptar o eixo z.</p> <p>SANDRO: se cortar no (eixo) z também vai dar a mesma medida (aponta para o desenho na lousa e ISIS concorda).</p> <p>PP questiona sobre os procedimentos no caso anterior.</p> | <p>478. DISTÂNCIA: é constante entre planos paralelos.</p> <p>479. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: “POSSIBILIDADES ENTRE PLANOS PARALELOS”</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|---|--|
| <p>PP: o que era mais importante quando vocês calcularam a distância no primeiro caso?</p> <p>CLAUDIO: o ângulo? De 90°, né?</p> <p>PP concorda e pega dois pedaços de isopor e os dispõe paralelos: eu vou tentar pegar bem inclinado (em relação à vertical). Se eu pedisse pra você (ISIS) indicar a distância entre eles, como você iria representar com o palito?</p> <p>ISIS, receosa, aproxima o palito de forma perpendicular.</p> <p>CLAUDIO solicita que PP represente o isopor e o segmento sobre o desenho na lousa e surge certa dificuldade de dispor a situação espacial na planitude do desenho da lousa.</p> <p>Ficou confuso concluir como estavam inclinados os planos que ISIS desenhou em relação aos eixos coordenados.</p> <p>ISIS altera a posição dos pedaços de isopor sobre o desenho na lousa para explicar como procedeu no desenho.</p> <p>PP questiona para compreender a representação de ISIS e também explica o modo como interpretou seu desenho.</p> <p>PP se volta para ISIS: quando você fez este desenho, você fez os dois planos paralelos ao eixo x?</p> <p>ISIS: tem que ser paralelo ao eixo x? (PP faz gesto negativo). Eu pensei que cada um corta o eixo y e vai cortar o eixo x uma hora (gesticula indicando prolongamento dos planos)</p> <p>PP: se eu fosse fazer esses dois planos paralelos ao eixo x eu ia fazer o desenho igualzinho ao seu, sabia?</p> <p>A confusão é grande para explicar o que cada uma quis representar e como cada um compreendeu.</p> <p>Com a ajuda de PP, ISIS modifica seu desenho para indicar a intersecção com o eixo x.</p> | <p>480. DISTÂNCIA: destaque ao ângulo reto</p> <p>481. DISTÂNCIA: destaque ao ângulo reto</p> <p>482. PLANO: infinitude indicada nos gestos</p> <p>483. INTERSECÇÃO: cortar os eixos coordenados</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: “POSSIBILIDADES ENTRE PLANOS PARALELOS”</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|---|---|
| <div style="text-align: center;">  </div> <p>SANDRO: mas esses dois não cortam (o eixo) z não né? Do jeito que tá aí.</p> <p>ISIS: eu preciso que vocês entendam que vai ter que cortar o x e o y em dois pontos.</p> <p>PP: mas tem porque você quer ou porque precisa?</p> <p>ISIS: precisa. Porque o plano é infinito e uma hora vai cortar.</p> <p>PP representa dois planos paralelos que não cortam um dos eixos e as dúvidas parecem aumentar. Todos buscam compreender as representações.</p> <p>ISIS: eu preciso que os dois planos cortem pelo menos um eixo.</p> <p>PP: um ou dois (eixos)?</p> <p>ISIS: isso tanto faz porque cortando um já basta.</p> <p>Diante dos olhares interrogativos, PP elabora uma nova representação com os eixos y e z desenhados na lousa e dispõe x saindo dela, perpendicularmente. Pede que ISIS segure um palito saindo da lousa na intersecção de y e z, representando o eixo x. Com os dois pedaços de isopor, PP representa os dois planos paralelos, alterando a posição para que eles interceptem dois ou três eixos. Todos acompanham atentivamente.</p> <p>PP: vamos pensar o caso mais simples.</p> <p>CLAUDIO complementa a fala de PP: cortando um só</p> | <p>484. INTERSECÇÃO: cortar</p> <p>485. PARALELISMO: modo de representar.</p> <p>486. INTERSECÇÃO: cortar</p> <p>487. PLANO: algo infinito</p> |

| <p style="text-align: center;">DESCRIÇÃO DA CENA: “POSSIBILIDADES ENTRE PLANOS PARALELOS”</p> | <p style="text-align: center;">USG</p> |
|--|---|
| <p>Então PP representa dois planos paralelos interceptando o eixo y apenas, ou seja, paralelos ao plano xz.</p> <p>SANRDRO atenta que se trata de um caso análogo ao primeiro, já analisado.</p> <p>SANDRO: cortando um só, não vai ficar inclinado. É como no caso anterior ... E agora a proposta é analisar o caso em que os planos não são paralelos a nenhum dos planos coordenados.</p> <p>ISIS: é verdade, se ele for inclinado ele vai cortar pelo menos dois (eixos).</p> <p>ISIS representa na lousa os dois planos paralelos entre si e cortando y e z. Ela explica a representação aos demais e indica o segmento determinado no eixo y pela intersecção dos planos com esse eixo.</p> <p>PP solicita que os alunos olhem de frente para visualizar melhor.</p> <p>PP: essa é a menor distância?</p> <p>CLAUDIO: a menor é pegar uma reta perpendicular aos dois.</p> <p>PP cola o isopor sobre os eixos, sendo auxiliada pelos alunos.</p> <div data-bbox="502 1435 745 1778" style="text-align: center;"> </div> <p>CAIO faz uma representação com palitos e isopor para a situação analisada na lousa e expor sua compreensão.</p> | <p>488. PLANO: Possibilidades de disposição no espaço</p> <p>489. PLANO: Possibilidades de disposição no espaço</p> <p>490. PLANO: Possibilidades de disposição no espaço</p> <p>491. INTERSECÇÃO: cortar</p> <p>492. DISTÂNCIA: Destaque ao ângulo reto.</p> <p>493. SISTEMA DE COORDENADAS: modo de sentir a tridimensionalidade da representação plana</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “POSSIBILIDADES ENTRE PLANOS PARALELOS” | USG |
|--|---|
| <p>PP: a distância vocês disseram que é essa (identifica com o giz rosa o segmento que liga as intersecções dos planos com o eixo y e alguns fazem gestos positivos). Essa é a menor distância? Ah, tá saindo o eixo daqui da lousa (e indica como se houvesse um eixo x saindo da lousa indo na direção de INGRID, que estava na linha do gesto de PP. Então ela se movimenta como se estivesse desviando do eixo imaginativo e todos dão risada)</p> <p>SANDRO: não é não. Tem que ser uma perpendicular.</p> <p>ISIS indica na lousa com um palito um segmento ortogonal aos dois planos: tem que ser assim, ó.</p> <p>PP altera a posição dos planos para que fiquem mais inclinados visando ressaltar que o segmento marcado não é ortogonal a ambos.</p> <p>ISIS: a perpendicular é a menor.</p> | <p>494. DISTÂNCIA: Destaque ao ângulo reto.</p> <p>495. DISTÂNCIA: Destaque ao ângulo reto.</p> |
| <p>7.24.87 A representação da situação no desenho da aluna limita a análise dos elementos envolvidos e faz com que as conclusões sejam objetivas. As discussões permitem esclarecimentos e novas construções que indicam a possibilidade de análises mais amplas, ao devolver a profundidade perdida no desenho. A dificuldade em interpretar as representações esboçadas exigiu que todos buscassem modos de esclarecer o exposto ou de compreender o afirmado pelo cossujeito.</p> | |

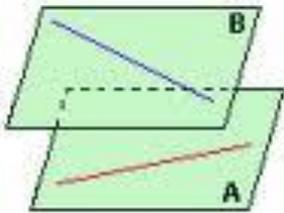
CENA 25 – INVESTIGANDO POSSIBILIDADES

| DESCRIÇÃO DA CENA: “INVESTIGANDO POSSIBILIDADES” | USG |
|--|---|
| <p>PP solicita que analisem a questão: <i>Considere uma reta paralela a um plano. Considere um ponto qualquer do plano e verifique se é possível determinar um segmento ligando esse ponto à reta e que seja perpendicular à reta e também ao plano.</i></p> <p>ISIS usa os materiais para indicar a solução que encontrou.</p> <p>INGRID: ortogonal aos dois (à reta e ao plano dados) não. Só se você pegar aqui (e indica os pontos da projeção ortogonal do palito no isopor).</p> | <p>496. PROJEÇÃO: movimento de projeção ortogonal de uma reta no plano.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “INVESTIGANDO POSSIBILIDADES” | USG |
|--|---|
| <p>SANDRO usa o material para indicar um plano ortogonal ao plano dado e que contém a reta dada, destacando que as retas buscadas devem pertencer a esse plano.</p> <p>SANDRO: teria que pegar um plano que contenha essa reta e que seja perpendicular ao plano. A reta que estiver contida nesse plano vai dar.</p> <p>PP complementa a fala de SANDRO: a reta e o plano paralelos foram dados. Aí ele criou uma reta perpendicular ao plano e à reta. Eu estou vendo que você já criou um plano aqui (gesticula indicando um plano contendo a reta dada e uma reta ortogonal ao plano dado e SANDRO confirma). Mas existem infinitas retas nesse plano, tem que tomar cuidado (indica uma oblíqua que não satisfaz a condição mas que pertence ao plano). Mas qualquer reta nesse plano que seja ortogonal à reta dada é também ortogonal ao plano.</p> | <p>497. PERPENDICULARIDADE: determinação do plano perpendicular a outro e que contém uma reta dada.</p> <p>498. CONTER: reta contida no plano</p> |
| <p>7.25.88 Projetam os elementos de modo a dar conta de explicitar o local onde os pontos devem estar de modo a atender ao solicitado.</p> | |

CENA 26 – DISTÂNCIAS ENTRE RETAS E PONTOS

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISTÂNCIAS ENTRE RETAS E PONTOS” | USG |
|---|---|
| <p>Começamos a analisar o procedimento para determinar distâncias no espaço.</p> <p>PP: como podemos calcular a distância entre duas retas no espaço?</p> <p>INGRID: se elas forem paralelas cai na mesma situação do plano, de pegar uma terceira reta perpendicular as duas (gesticula indicando duas retas paralelas imaginárias). E a distância seria esta (indica o segmento de reta que intercepta as duas retas e é ortogonal a ambas).</p> <p>PP considera que todos compreendem que ela se refere ao segmento e não a reta para dizer da distância, mas ressalta a atenção para isto.</p> <p>PP: pego uma reta perpendicular, mas a distância é aquele segmento, ok? E se não forem paralelas?</p> | <p>499. DISTÂNCIA: Destaque ao ângulo reto.</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISTÂNCIAS ENTRE RETAS E PONTOS” | USG |
|--|---|
| <p>CAIO: se fossem concorrentes uma hora iriam se tocar, aí seria zero.</p> <p>PP: e duas retas reversas?</p> <p>CAIO: seria a mesma coisa, criar uma reta perpendicular, e...</p> <p>CLAUDIO: se juntar (e gesticula projetando uma reta reversa na outra), para achar o ponto de intersecção.</p> <p>ISIS: pode usar um plano perpendicular às duas (retas reversas)? (gesticula representando duas retas reversas e um plano que considera ser ortogonal a ambas, mas isso não é possível)</p> <p>PP: o plano é perpendicular às retas?</p> <p>ISIS aponta para uma das retas e para o plano: forma um ângulo de 90 (aponta para umas das retas onde o ângulo parecia estar disposto em 90°, mas não era perpendicular à outra reta).</p> <p>CLADIO verifica que o plano não está perpendicular a outra reta e questiona sobre o ângulo determinado.</p> <p>PP relembra a discussão sobre o ângulo entre reta e plano.</p> <p>PP se aproxima da representação de ISIS e aponta para o ângulo, que nitidamente, naquele caso, não era de 90 graus.</p> <p>CAIO ressalta: não precisa desse plano para calcular a distância.</p> <p>Buscando aproveitar a ideia de usar o plano para calcular a distância entre duas retas reversas, PP destaca o fato de existir dois planos, cada um contendo uma das retas, que são paralelos entre si, como foi discutido em encontro anterior.</p>  | <p>500. DISTÂNCIA: valor nulo.</p> <p>501. PROJEÇÃO: movimento de projeção ortogonal entre duas retas reversas</p> <p>502. PERPENDICULARIDADE: busca por um plano perpendicular a duas retas reversas.</p> <p>503. PERPENDICULARIDADE: manipulação de objetos buscando perpendicularidade.</p> <p>504. PERPENDICULARIDADE: visualização de disposição não perpendicular</p> <p>505. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISTÂNCIAS ENTRE RETAS E PONTOS” | USG |
|--|---|
| <p>CAIO nota que a distância entre as retas é a mesma que a entre os planos.</p> <p>CAIO: é a mesma distância entre os planos..</p> <p>PP: e como pode ser uma reta e um plano no espaço? (apresentam os três casos possíveis e concluem que no caso de reta contida ou concorrente ao plano a distância é zero). E se forem paralelos (a reta e o plano)?</p> <p>INGRID: da mesma forma ia buscar uma perpendicular a ambos.</p> <p>CLAUDIO: pega outro plano passando por essa reta e é paralelo ao plano, aí a distância vai ser a distância entre os planos.</p> <p>PP: e como vocês fariam a medida da distância de um ponto aqui e um plano aqui? (gesticula indicando as posições do ponto e plano imaginários)</p> <p>INGRID: eu pensei numa reta que ligasse os dois.</p> <p>Então PP representa com palito vários segmentos oblíquos ligando o ponto ao plano e INGRID complementa que devem ser perpendiculares.</p> <p>ELVIS destaca a possibilidade de a reta indicada estar em pé, já que na representação de PP o isopor foi disposto paralelamente ao chão.</p> <p>ELVIS: eu faria uma reta em pé (gesto indicando um segmento vertical ligando isopor e o ponto).</p> <p>Então PP modifica sua representação, inclinando o pedaço de isopor de modo que ele não fique paralelo ao chão e representa com o palito um segmento vertical ao chão, e, portanto, não ortogonal ao plano. então INGRID e ELVIS fazem sinal negativo.</p> <p>ELVIS: perpendicular.</p> | <p>506. DISTÂNCIA: destaque ao ângulo reto</p> <p>507. DISTÂNCIA: modo de determinar a distância</p> <p>508. INTERSECÇÃO: reta ligando dois planos paralelos</p> <p>509. PERPENDICULARIDADE: destaque para reta vertical ao chão.</p> <p>510. PERPENDICULARIDADE: rompendo a perpendicularidade com o chão</p> <p>511. DISTÂNCIA: destaque ao ângulo reto</p> |

| DESCRIÇÃO DA CENA: “DISTÂNCIAS ENTRE RETAS E PONTOS” | USG |
|---|--|
| <p>PP: a quem?</p> <p>ELVIS: (perpendicular) ao ponto (fora do plano).</p> <p>INGRID imediatamente corrige a afirmação do colega, revelando clareza quanto aos procedimentos: perpendicular ao plano e contendo o ponto.</p> | <p>512. DISTÂNCIA: destaque ao ângulo reto</p> |
| <p>7.26.89</p> <p>A análise revelou clareza e trouxe aspectos de discussões anteriores ou elementos possíveis de serem considerados. Os procedimentos ganharam destaque e a expressão parece indicar um refinamento das explicações e expressão do compreendido. Há complementação das falas na correção do afirmado pelo colega.</p> | |

-----*

4.3 Buscando Transcendência: reflexões sobre as cenas

Nesse momento da pesquisa, partimos das análises dos individuais realizadas até aqui e nos dirigimos para uma compreensão geral do fenômeno, em um movimento reflexivo no qual nos voltamos para as cenas e unidades significativas e as interrogamos, ficando atentos ao que dizem e também aos sentidos e significados comuns a elas, articulando, então, invariantes que as interpenetram.

Desse modo, continuamos a efetuar a redução fenomenológica articulando convergências a partir das análises das cenas, avançando na direção das noções mais gerais que estruturam o fenômeno, buscando o que é característico a ele, compreendendo os sentidos que se doam.

Mediante um trabalho de idas e vindas do pensamento atento ao interrogado, buscamos articular os sentidos e significados individualmente considerados, direcionando nosso pensar para as ideias mais gerais a que eles nos remetem, tentando expor o fio que tece as diferentes cenas e unidades e que emaranha-se de modo orgânico a elas.

Atentando para as cenas e asserções que delas emergem, intencionamos as *ideias nucleares* que se doam na convergência dos sentidos comuns dados pontualmente em cada cena, transcendendo a experiência espacial e temporalmente vivida dos encontros. Estas *ideias nucleares* são asserções mais abrangentes elaboradas a partir da articulação dos sentidos desvelados pelas análises.

Nesse movimento de redução em direção às *ideias nucleares* do fenômeno, destacam-se as complexidades de sentidos explicitados, já que as convergências efetuadas a partir de cada cena ou unidade direcionam para mais de uma *ideia nuclear* entranhada a ela. Destaca-se também o forte entrelaçamento entre as diferentes cenas, no modo como cada uma delas se enreda a outra, formando um amalgamado de sentidos.

Ao colocar as cenas em perspectiva, mobilizando nosso pensar em direção ao esclarecimento do que se mostra, focamos nossa atenção a fim de romper com o sentido específico de cada uma, adentrando em compreensões mais abrangentes do fenômeno.

Para isto, focamos as cenas e as unidades significativas, revendo-as diversas vezes, buscando pelo seu sentido à luz da interrogação. Por meio da articulação de asserções que expressam os sentidos revelados nos encontros do curso de extensão, e orientados pela questão diretriz, focamos nosso pensar sobre o significado desses encontros, olhados em sua totalidade, atentando para as convergências dos sentidos expressos e visualizados no seu entrelaçamento, de modo a constituir *ideias nucleares* que enredam as cenas destacadas nas

descrições e que dizem de modos de a construção do conhecimento geométrico ser produzida em situação de ensino e de aprendizagem.

Assim, por exemplo, ao focar a primeira unidade significativa da cena 1 do encontro 1 (*a expressão verbal se complementa aos gestos e revela aspectos da linguagem Matemática, na possibilidades de identificar planos e eixos coordenados. Denota o mundo-vida que habita e suas compreensões provenientes do processo de escolarização.*) constatamos, ao iluminá-la à luz da questão diretriz, significados relacionados à complementação da expressão com gestos esclarecedores, à visualização de eixos coordenados e ao uso de termos matemáticos comuns aos alunos e que dizem de um conceito geométrico. Assim, consideramos que os sentidos desvelados por essa unidade significativa, a partir das análises efetuadas, são:

- Manifestação de compreensões relacionadas às vivências de significados matemáticos da formação escolar.
- Gestos complementadores na explicitação da compreensão;
- Visualização mental manifestada na atatividade do olhar e na descrição apresentada diante do focado.

Continuando a indagar cada cena, prosseguimos no movimento de explicitar, em asserções diretas, os sentidos percebidos que dizem dos modos de construção das ideias geométricas. Analisamos cada uma das cenas e unidades significativas, focando-as à luz da questão de nossa investigação sobre *como se dá o ensino e a aprendizagem da geometria assumida nos aspectos de compreensões pré-predicativas e nos encaminhamentos que direcionam para uma produção geométrica*, interrogando e deixando emergir dos dados o sentido do fenômeno investigado.

Ao final de uma análise cuidadosa de todas as cenas, articulamos, mediante o movimento do pensar reflexivo, 15 asserções nas quais buscamos expressar os sentidos desvelados a partir das 89 unidades de significado e 512 unidades de significado para o conceito geométrico. Tais asserções, ao serem focadas atentivamente, revelaram inter-relações e possibilidades de direcionamento para as *ideias nucleares*.

O quadro a seguir indica as unidades significativas e os sentidos desvelados a partir de nosso olhar interrogativo, destacando as *ideias nucleares* para as quais, em nosso entender, cada um deles converge:

CONVERGÊNCIA PARA AS IDEIAS NUCLEARES

| UNIDADES SIGNIFICATIVAS | SENTIDOS DESVELADOS | IDEIAS NUCLEARES |
|---|--|---|
| 1,3,4,6-8,10-20,21-24,27,28,32,41,42,53-60,62,71,75,77,78,80,82,84,86,87 | Manifestação de compreensões relacionadas às <u>vivências de significados matemáticos</u> da formação escolar. | Manifestação de compreensões prévias e possibilidades de desdobramentos para as ideias e conceitos geométricos |
| 2,5,9,11,14,16,17,20,21,30,35,42,43,45,46,48,49,54,56,58-60,63-66,68,74,75,77,82,83,84,86,87 | Manifestação de compreensões que trazem sentidos próprios das <u>experiências vividas no cotidiano</u> . | |
| USG 1-513 | <u>Expressões pré-predicativas</u> que direcionam sentidos relacionados a conceitos geométricos. | |
| 1-3,6-8,10,12,14-23,28,29,31,32,34,41-44,48,50,53,54,56-60,62,63,68-71,73-75,79-81,85,86,88 | <u>Gestos complementadores</u> na explicitação da compreensão. | Movimentação do corpo-próprio expressando compreensão |
| 1,3,6,8,10,12,13,17,20,22,24,27,28,30,32,35,38,39,42-44,46,48,49,52-54,56,59,60,63,66,67,73,77,78,79,88 | <u>Visualização mental</u> manifestada na atatividade do olhar e na descrição apresentada diante do focado. | |
| 8,14,16,19,29,34,35,47,49,56,58,59,61,64,66,68,74,76-84,87,89 | Ênfase em <u>situações comuns/usuais/ cômodas</u> | Modos de proceder e horizonte de aberturas |
| 10,11,12,15,16,22,23,27,38,39,41-43,45,48,50,55,56,59,67,68-71,73,77-79,82,83,85 | Atividade que avança no <u>horizonte de possibilidades descortinado</u> (evidências e insights manifestos). | |
| 5-8,10-17,19-23,27,28,32,34,41-46,48,53,54,56,58-63,69,69,71,73-75,77,79-86,89 | <u>Complementação</u> de ideias, explicações, dúvidas e ações junto aos cossujeitos. | Comunalização²⁹ |
| 5,15-17,24,26,28,30,35,36,40,42,44,51,53,55-60,64,73,77-79,82,83,87 | <u>Convergências e divergências</u> na explicitação do entendimento. | |
| 3,4,6,7,10-12,15,16,19,21,22,23,33,36,38,39,44,45,48,52,54-56,58,60,62,63,65-68,73,75-80,83,84,86,89 | Estabelecimento da <u>Comunicação empática</u> | |
| 2,30,40,47,49,51,53,56,58-60,62,63,64,66,70,76-81,83,87 | <u>Identificação de interpretação imprópria</u> e reelaboração coletiva. | |
| 8,17,18,22,25,31-33,37,47,49,52,56,57-61,64,68,73,76,77,79,82,83,84,88 | Busca por <u>justificar conclusões e argumentações</u> pela obviedade do exposto. | |
| 10,23,27,29,38,41-43,48,55,65,78,85 | Justificativas apoiadas nas <u>evidências surgidas</u> (fundamentação de conclusões). | |
| 2,15-23,25,29,30,32-37,40,42,44,50,52,54-58,60,62-64,67-71,73,74,76,78,81,84,85,88,89 | <u>Utilização dos materiais concretos</u> para investigar ideias, manifestar compreensão, complementar a expressão verbal. | Apoio no material manipulável: possibilidades e limites |
| 2,8,28,34,35,49,59,63,67,77,79,80,83 | <u>Limitação do material concreto</u> . | |

²⁹ Comunalizar tem o sentido de tornar compartilhável valores, ideias etc. entre membros de uma comuna ou comunidade. Comunalização diz do movimento pelo qual, no ambiente de encontros, as ideias e compreensões geométricas são co-partilhadas entre cossujeitos.

Cada uma das *ideias nucleares* destacadas carrega significados que ao nosso entender devem ser abertos e retomados juntamente com as cenas, buscando responder à interrogação posta e vislumbrar uma compreensão do fenômeno, possibilitando um salto em termos de teorização sobre o ocorrido. Entendemos que a teorização buscada se dá na sistematização do conjunto de compreensões expostas em linguagem escrita, revelando um discurso sobre o vivido, reunindo, mediante um trabalho articulador, regulado por análises interpretativas e reflexivas, as convergências compreendidas, direcionando para os aspectos essenciais, e, concomitantemente abrangentes, do investigado.

Neste sentido, buscamos adentrar analiticamente pelas ideias nucleares destacadas acima.

Manifestação de compreensões prévias e possibilidades de desdobramentos para as ideias e conceitos geométricos

Entendemos, no próprio processo de efetivação do curso aqui analisado, que foi importante construir uma significação conjunta dos termos geométricos necessários ao transcorrer das atividades, avançando na constituição da intersubjetividade e respectivos modos de expressão do compreendido. Como pudemos constatar, muitos significados manifestados pelos alunos carregavam sentidos percebidos em suas vivências no mundo-vida do seu cotidiano e que, em certos casos, não eram apropriados à atividade em foco. Ao mesmo tempo, visualizamos nas manifestações dos sujeitos – e muitas vezes sentimo-nos perplexos – aspectos de suas experiências, escolares ou não, matemáticas ou não, que dizem de compreensões, associações, relações etc., sugerindo fortes entrelaçamentos com as ideias e conceitos geométricos formalmente considerados.

Pode-se, em princípio, considerar que certas compreensões pré-predicativas expostas pelos alunos são inadequadas aos procedimentos da matemática (entendida como ciência do mundo ocidental), mas, conforme nossa compreensão, elas destacam diversas significações e experiências concernentes à Geometria, e, nesse sentido, essas expressões pré-predicativas direcionam para aspectos, características e propriedades de conceitos geométricos, indicando possibilidades de exploração dos sentidos percebidos e de direcionamentos pedagógicos para trabalhar-se com os conceitos envolvidos.

A manifestação de compreensões relacionadas aos significados matemáticos da formação escolar revela-se em situações nas quais os sujeitos se valem dos termos

matemáticos que lhes são comuns de modo claro e direto. Essas manifestações se apresentam, por exemplo, na ênfase na medida do ângulo determinado por duas retas perpendiculares, como sendo reto ou de 90° ; no destaque para a infinitude de uma reta ou de um plano; no uso de palavras como *área* para dizer de uma região específica; na compreensão de um sistema de coordenadas e de seus elementos; no uso da palavra quadrante e nos modos de apresentar o seu sentido; na explicação do conceito de paralelismo pela impossibilidade de intersecção; etc.

Entrelaçadas a essas compreensões estão aquelas que trazem sentidos próprios das experiências vividas no cotidiano, revelando aproximações e afastamentos às ideias matemáticas relacionadas, conforme verificado ao buscarmos explorar o modo como os alunos concebiam certos conceitos. Assim, o termo *distância*, por exemplo, é falado de modo inadequado para dizer sobre o que é o ângulo, se considerarmos seu aspecto matemático: “a distância entre os seus lados”. Considerando que tal conceito (o de distância) foi discutido com o grupo de alunos a partir da perspectiva do seu significado matemático, a distância entre os lados de um ângulo seria nula, já que eles se interceptam. Porém, ao ser falado para dizer do ângulo, o termo *distância* se doa no sentido das vivências cotidianas, destacando, juntamente com os gestos expostos, a região entre os lados do ângulo, sendo, portanto, passível de compreensão apropriada pelos demais.

A referência a uma barra girando em torno de um eixo para ilustrar uma situação na qual se busca pelas retas ortogonais a outra dada; a exemplificação da ideia de paralelismo pela indicação dos cantos opostos de uma mesa, sem referência a uma definição formal do termo; e o uso da expressão “pedaço da reta” para dizer do significado de semi-reta são exemplos de situações nas quais as compreensões prévias dos alunos revelaram-se convergentes para diferentes ideias e conceitos relacionados.

Ao explicitarmos, no decorrer das cenas, as diversas expressões dos alunos e os conceitos aos quais remetiam, foi possível avançarmos visualizando possibilidades de compreensões mais abrangente, em direção aos sentidos e significados presentes na matemática, tomada de uma perspectiva formal, e em sintonia com as compreensões prévias dos alunos nas atividades propostas.

Assim, destacadas as USG (Unidade de Significado para o conceito Geométrico), realizamos um movimento de análise, articulando convergências dos sentidos expostos a partir delas, buscando uma compreensão mais ampla quanto às relações entre os conceitos matemáticos e os conhecimentos prévios dos alunos.

Para isto, focamos o conceito em termos de sua definição predicativa, ou seja, enquanto formulado e apresentado objetivamente nos livros-textos de matemática, confrontando-os aos sentidos e compreensões expressos pelos alunos. É certo que as definições e descrições apresentadas nos livros-textos podem ganhar nuances diferentes de acordo com a especificidade do livro ou do autor considerado. Portanto, demos destaque para aquelas que se aproximam ao sentido das discussões havidas. Assim, por exemplo, ao focarmos o sistema de coordenadas cartesiano, nos livros de Geometria Analítica, ele pode ser definido com base em vetores geradores, porém, nas discussões entre professora-pesquisadora e alunos o tema vetores não foi abordado de modo a possibilitar compreensões relacionadas a essa definição e, portanto, optamos por aquela que dá destaque aos eixos coordenados e outros elementos, já que esses aspectos se fizeram presentes nas discussões ocorridas.

Na análise efetuada, não pretendemos dar conta de abarcar os conceitos geométricos em sua referência objetivo-científica, mas destacar os aspectos que se revelaram para nós como relacionados aos conceitos em foco, possibilitando expor compreensões e refletir sobre as manifestações e (re)elaborações dos alunos, e sobre os aspectos que se mostraram dificultadores ou potencializadoras para as situações de ensino.

Neste sentido, destacamos, nos quadros a seguir, alguns dos conceitos geométricos que ganharam destaque nas discussões havidas, apresentando as unidades significativas para o conceito geométrico (USG) e explicitando nossas compreensões, que se desdobram a partir delas, que dizem de suas articulações com o conceito geométrico em foco. Após, realizamos uma breve discussão quanto aos aspectos evidenciados na análise.

Sistema de Coordenadas Cartesianas

| USG | Articulações com o Conceito Geométrico |
|--|--|
| identificação de planos, eixos, cantos | Identificação e reconhecimento dos elementos constituintes |
| identificação de planos paralelos aos planos coordenados | |
| indicação da direção dos eixos | |
| Identificação de planos coordenados | Indicação de relações e de propriedades entre os elementos |
| perpendicularidade dos elementos | |
| Prolongamento dos eixos | |
| sentidos dos eixos | |
| representação com materiais concretos | |
| possibilidade de mover a representação | Modo de organizar, ordenar e trabalhar no espaço |
| denominação da região delimitada | |
| modo como divide e organiza o espaço | |
| novo modo como divide e organiza o espaço | |

| | |
|---|---|
| ordenação | Interpretação da representação plana com apoio nos materiais. |
| limitação ao primeiro octante | |
| modo de sentir a tridimensionalidade da representação plana | |
| representação com materiais concretos | |
| indicação da direção do eixo na representação plana | |

O Sistema de Coordenadas Cartesiano tridimensional é apresentado nos livros em termos do que o compõe e do modo como estão dispostos: “três planos mutuamente perpendiculares que se interceptam em três retas mutuamente perpendiculares e num ponto comum”. Os significados explicitados nas cenas se direcionam para essa definição e ganham um sentido mais dinâmico na medida em que houve a manipulação de representações que possibilitaram experienciar a ideia além do definido e representado de modo plano nos livros. O salto de significação entre a representação espacial e seu desenho no papel ou na lousa se deu, ou se mostrou enfático, quando os alunos, atentamente expressavam o modo como compreendiam e comungavam suas compreensões, indicando as dificuldades relacionadas à interpretação do expresso no desenho, em sua perspectiva necessária que ao mesmo tempo o tornava “estranho”. A manipulação do material à disposição dos alunos revelou novas possibilidades de interpretações e a compreensão da relação de identidade entre os elementos, em cada caso.

Plano, planitude e coplanariedade

| USG | Articulações com o Conceito Geométrico |
|--|---|
| qualidade de um objeto plano | Situações cotidianas que remetem ao plano |
| uma área | |
| plataforma | |
| nivelamento | |
| chão como base para retas paralelas a ele | Indicação de modos de compreender o plano e o que ele é |
| Limitado como o material que o representa | |
| infinitude indicada nos gestos | |
| possibilidade de ser finito | |
| algo infinito | |
| vazio | Indicação do que o constitui ou como é constituído |
| constituído de pontos | |
| constituído de infinitos pontos | |
| constituído de retas que se interceptam | |
| modo de organização dos pontos | |
| Plano que contém as infinitas retas solução de um problema | |
| gestos indicando planitude | |

| | |
|---|---|
| visualização de um plano por duas retas que se interceptam | Verificação de possibilidades espaciais e relações com outros objetos |
| necessidade recíproca dos elementos envolvidos | |
| manutenção da coplanaridade | |
| Retas reversas não são coplanares | |
| identificação de planos paralelos cada qual contendo uma reta reversa à outra | |
| possibilidade de um plano ser ou não paralelo a uma reta | |
| impossibilidade de um plano conter duas retas reversas | |

Em muitos livros-texto o plano é abordado como um ente primitivo não sendo, portanto, definível, e, no decorrer dos capítulos, são apresentados modos de ser determinado, como por exemplo, a partir de retas concorrentes ou por três pontos não colineares. Alguns desses modos são explicitados nas manifestações dos alunos, por exemplo, ao disporem uma folha tocando duas retas concorrentes para indicar que são coplanares, ou quando verificam a impossibilidade de um plano conter duas retas reversas. Os materiais manipuláveis indicam algumas limitações no entendimento do conceito geométrico, relacionados à sua infinitude, mas que foram sanados no decorrer dos encontros.

Reta

| USG | Articulações com o Conceito Geométrico |
|--|--|
| constituída de pontos | Indicação do que ela é ou do que a constitui e de suas características |
| referência estática | |
| possui direção e sentido | |
| gestos indicando infinitude. | |
| continuidade indefinida | |
| possui direção | |
| possui inclinação | |
| mirando o alinhamento de dois pontos | Possibilidades de disposição no espaço e de relações com outras retas e outros elementos |
| possibilidade de uma reta ser ou não paralela a um plano | |
| possibilidade de duas retas determinarem um ângulo reto | |
| identificação de ponto na reta | |
| destaque para intersecção entre as retas | |
| movimento eliminando a intersecção entre as retas | |
| possibilidade de girar em torno de outra reta. | |
| disposição em relação ao “chão” | |
| retas ortogonais como não reversas | |
| na intersecção de duas retas concorrentes determinam-se quatro ângulos | |

| | |
|---|---|
| destaque para a interseção da projeção entre duas retas reversas. | |
| reversas como não paralelas | |
| comparação a um objeto cotidiano | Sentidos comuns às situações cotidianas |
| menor distância | |
| limitada, como o material usado para representa-la | Relações com o material manipulável |
| prolongamento com os materiais, indicando continuidade | |
| verificação da impossibilidades de representação ideal. | |

A reta também é abordada em muitos livros como ente primitivo. Nas discussões destacou-se a limitação da representação com os materiais manipuláveis, ao mesmo tempo em que eles possibilitaram aos alunos experienciar, investigar e inferir conclusões. Quando o termo é usado para dizer da distância, o sentido é de certo modo comum a todos, não sendo tematizado o conceito matemático de reta, em sua infinitude, mas sim o seu significado mundano, enquanto a melhor forma de se medir um trajeto.

Paralelismo

| USG | Articulações com o Conceito Geométrico |
|--|---|
| destaque para o paralelismo com o chão. | Destaque para o paralelismo com o chão e modos de proceder buscando paralelismo entre objetos |
| rompendo o paralelismo com o chão | |
| Mirando o paralelismo | |
| verificação de não paralelismo | |
| disposição de objetos | |
| paralelismo aos eixos coordenados | |
| constatação de paralelismo entre as soluções possíveis | |
| modos de manutenção do paralelismo | |
| impossibilidades de intersecção | Descrição do que é o paralelismo, buscando caracterizá-lo |
| mesma inclinação | |
| mesma direção e sentido | |
| mesma distância | |
| área entre duas coisas paralelas | |
| relação entre o paralelismo e ângulos determinados | |
| duas retas não paralelas se interceptam | |

Nas situações envolvendo paralelismo entre elementos, destacou-se o modo como os alunos procediam buscando dispô-los paralelamente ou descrever sobre o paralelismo entre eles. O paralelismo com o chão em vários momentos evidenciou o “solo” da sala como uma referência para as ações. Em comparação ao trazido nos livros didáticos, de acordo com o

destacado, verificamos nas manifestações dos alunos convergências de sentido nas situações em que os alunos se referem à *direção* dos elementos ou à *impossibilidade de interseção* entre eles.

Perpendicularismo, ortogonalidade

| USG | Articulações com o Conceito Geométrico |
|---|--|
| ângulo reto | Destaque para a característica essencial e verificação de possibilidades e decorrências |
| igualdade dos ângulos determinados por duas retas perpendiculares | |
| manipulação de objetos buscando perpendicularidade | |
| visualização de disposição não perpendicular | |
| perpendicularidade decorrente da disposição de elementos | Modo de disposição espacial e consequências da perpendicularidades entre entes geométricos |
| modo de disposição no espaço | |
| identificação de infinitas retas perpendiculares à outra reta | |
| Referencia ao ângulo reto para expor compreensão. | Destaque para a disposição perpendicular |
| Disposição mais “bonita” | |
| destaque para a disposição perpendicular. | |
| Disposição vertical | |
| rompendo a perpendicularidade com o chão | |

A perpendicularidade se destacou durante todos os encontros. O termo e outros relacionados, como ângulo reto e ortogonalidade, a todo momento foram usados pelos alunos para expor compreensão e propor possibilidades de disposição, indicando a ortogonalidade por meio de gestos e explicações. A visualização de perpendicularidade se revelava clara a todos. Os livros-texto fazem referência ao ângulo reto ao tratarem o termo *perpendicular*, como ocorreu no decorrer dos encontros, mas as manifestações dos alunos revelaram o sentido do vivido e experienciado: eles se dispõem desse modo perpendicular, se visualizam assim em relação ao chão.

Ao voltarmos-nos para as *manifestação de compreensões prévias e possibilidades de desdobramentos para as ideias e conceitos geométricas*, destacam-se, ao nosso olhar reflexivo, as situações de convergências e divergências entre os significados expressos, entre as próprias compreensões dos alunos ou ao apresentado na matemática formal. Muitas vezes nos encontros, foram empregados termos do cotidiano dos alunos e nosso, adentrando pelo sentido percebido nas vivências. Ao avançarmos para além das compreensões expressas,

buscando explorá-las matematicamente, alguns termos se revelam não apropriados, outros passíveis de reelaborações e ainda há aqueles que traduzem de forma imediata a ideia matemática que buscam expressar, mesmo que sem referência a uma apresentação formal do termo.

Assim, os sentidos das palavras, termos e descrições apresentados se refazem ao serem explicitados e a compreensão do dito vem acompanhada da movimentação do corpo-próprio, expondo a intencionalidade do olhar frente ao focado, adentrando por novas compreensões em movimentos de reelaborações que se dão por meio da reflexão sobre as informações expostas e ideias que cada um apresenta. Trabalhar na direção da discussão coletiva desses sentidos e significados que vão se clareando indica a possibilidade de uma atividade pedagógica mais dinâmica, especialmente frente às diversas possibilidades que se abrem ao explorar a geometria tridimensional, as experiências cotidianas dos alunos e os sentidos próprios do fazer matemático.

Movimentação do corpo próprio buscando expressar compreensão

Dada a interrogação desta investigação e, consonante a ela, a própria configuração das atividades propostas para os encontros, foi focada a expressão do corpo-próprio explorando o espaço, expressando sentidos compreendidos, direcionando-se para os cossujeitos, movendo-se a partir de suas compreensões e interpretações, expressando atentividade ao outro e às suas indicações, confirmações e negações manifestas nos gestos, olhares, silêncios etc.

Os gestos, movimentações, manipulações se destacaram, durante todos os encontros, na explicitação de compreensões. Sem eles, a mera exposição oral resultaria em interações pouco envolventes, em especial por este estudo ter como referência o espaço tridimensional. Explorar o “espaço” dos encontros, o espaço da sala de aula, solicitou aberturas para as interações e para os diversos modos de expressão.

Os gestos expressam sentido e ganham novas significações na medida em que colaboram para tornar a expressão mais clara diante do focado ou para enriquecer a expressão e facilitar a coparticipação de entendimento. É nítido como, em muitos casos, se torna impossível expor o compreendido apenas com palavras. Em outros, ainda, o silêncio do som da palavra nem é notado em detrimento da complexidade dos gestos e movimentos efetuados. Eles, por si só, já dizem.

Outro aspecto que se revela importante na manifestação do corpo-próprio se refere à possibilidade de dialogar e expressar ao colega algo que está sendo visualizado, interpretado e compreendido. Tal entendimento é manifestado na atenciosidade do olhar e no diálogo falado, apresentados diante do focado. Assim, por exemplo, ao identificar um eixo imaginário em uma representação, o aluno já se refere a ele como se existisse de fato: “olha, tem um plano aqui, um eixo pra cá [risos]”. A infinitude da reta e do plano ganha destaque nos gestos com as mãos indicando prolongamento ou continuidade, e a complementação dos gestos com sons, como *zizz*, destacam tal prolongamento. A impossibilidade de intersecção se explica no gesto das mãos lado a lado indicando continuidade e a não ocorrência de uma intersecção.

Nas interações coletivas, a possibilidade de se dispor ou de dispor algo paralelamente a um referencial exige dos sujeitos que se coloquem como ponto-zero que mira e busca tal possibilidade. A manutenção de disposições espaciais também se dá na verificação do efetuado pelo outro e na sintonia dos movimentos do corpo-próprio ao proposto coletivamente.

Na movimentação pelo cenário e na investigação quanto ao sistema de coordenadas tridimensional, o piso se constitui como base na qual os sujeitos se locomovem e é a referência para suas análises. Ao atentar para as divisões do espaço possibilitadas pela representação de um sistema de coordenadas, desconsideram, inicialmente, o eixo vertical como mais um elemento divisor, ainda que já o tenham representado com material manipulável. Assim, inicialmente, apontam para o cenário, movimentando-se e indicando o modo como ele está dividido: em quatro partes distintas indicadas no chão da sala. Mas a exploração do ambiente indicou uma nova possibilidade ao se darem conta de que há espaço acima e abaixo do chão e, então, concebem a possibilidade de dividirem o espaço em oito partes distintas.

Ao disporem-se como retas no espaço vislumbram a possibilidade de determinar um ângulo reto entre as retas, inicialmente se intersectando, mas abrindo-se para a possibilidade de “descolamento” das retas. Os entes geométricos tornam-se, assim dinâmicos, possibilitando análises e reconfigurações. A manipulação dos recursos à disposição indica a busca por retas reversas, ortogonais, paralelas, intersecções etc., e cada disposição, gesto ou movimentação foca o aspecto principal da situação em destaque.

A análise de um desenho na lousa de um sistema de coordenadas tridimensional indica a constatação da disposição dos eixos: há consideração quanto à possibilidade de um eixo (o eixo x) “estar saindo” do desenho, e os alunos indicam, com gestos, a visualização da ortogonalidade desse eixo com a lousa que foi perdida no desenho plano. As distintas formas

de olhar para a representação do sistema na lousa destaca, na cocompreensão entre os sujeitos, o movimento de ir além daquela representação convencional aos livros texto, adentrando por sentidos percebidos, explorando novas possibilidades de voltar o olhar para ela, e, assim, o desenho plano ganha novos sentidos.

Em outra situação, ao analisar diferentes representações de um sistema de coordenadas tridimensional do seu *ponto zero*, o corpo próprio direciona o olhar em torno da figura, movimentando ou rotacionando a folha na qual está traçada, buscando ver para além da planitude esboçada. Com a movimentação, a figura ganha a tridimensionalidade perdida na planitude do papel.

Ao pensar sobre o ângulo disposto em algum lugar qualquer do espaço, os alunos buscam romper com aquela representação padronizada dada nos livros, que o apresentam como uma figura com algum lado paralelo aos lados da folha em que estão esboçados. Vislumbram assim modos de voltar-se para essa representação, já que podem estar de frente com ela, focando-a de um lado ou de outro, olhando-a de baixo pra cima etc. Inicia-se assim uma discussão quanto ao valor da medida do ângulo, que desvela sentidos associados à determinação dessa medida, avançando em termos de sua unicidade e de novas possibilidades de disposição no espaço.

Um aspecto que se destaca na representação dos alunos é a manutenção de situações cômodas, como perpendiculares ao chão ou paralelas a ele. Em certos momentos, a ênfase nesse aspecto ofuscou novas investigações ou explorações mais abrangentes. Por outro lado, à medida que tematizavam o espaço e experienciavam possibilidades abertas, as configurações se renovavam, indicando que estavam adentrando por horizontes percebidos.

Assim, no decorrer dos encontros, o corpo-próprio em sua espacialidade, adentra por compreensões e recorre aos recursos disponíveis para validar ou explicitar o modo como entende, para questionar ou testar disposições, para elaborar conjecturas e expor o percebido, para se doar ao intencionado. Esse aspecto se revela ao mesmo tempo essencial à exploração das ideias focadas e às reelaborações dos alunos. Voltar a atenção para esse aspecto também sugere novas dinâmicas e atividades didaticamente viáveis na exploração daqueles ou de novos conceitos geométricos, em diferentes séries ou níveis de ensino.

Modos de proceder e horizonte de aberturas

A ênfase na elaboração de representação de situações mais comuns ou cômodas foi um aspecto que se destacou nos encontros e que, ao mesmo tempo, indicou a possibilidade de

exploração e questionamentos frente a essa postura. Por exemplo, ao focarem o sistema de coordenadas tridimensional, aspectos da representação plana são inicialmente explicitados e, assim, a divisão do espaço se dá apenas relativamente aos eixos x e y . Mas questionar o papel do eixo z permitiu novas explorações, de modo que adentraram por novas possibilidades de divisão, e passam a considerar o espaço acima e abaixo do plano do chão, num gesto que revela evidência e clareza.

A representação de posições de retas limitadas ao primeiro quadrante levou, em alguns casos, a resultados inadequados. Mas solicitou novas explorações do espaço, evidenciando novas disposições.

Ao buscarem as diversas possibilidades de solução para uma situação como, por exemplo, as retas que são perpendiculares à outra dada, as soluções paralelas entre si ganham destaque. Os alunos indicam a infinidade de retas coplanares que são ortogonais à reta dada e destaca-se o movimento de translação executado para apresentar estas infinitas retas. Ao vislumbrarem novas possibilidades para a reta buscada, realizam um movimento de rotação ortogonalmente em torno da outra ou o sujeito se inclina obliquamente para indicar uma possibilidade para a reta buscada, evidenciando compreensão quanto aos questionamentos lançados e visualização de novas disposições. As representações espaciais possíveis se ampliam, avançando para além daquela configuração padrão inicial, indicando a atenciosidade do olhar na busca por novas configurações para as soluções.

A ênfase em situações mais cômodas, como aquelas em que se mantém o paralelismo ou perpendicularismo com o chão, foi uma constante em todo o curso. Assim, ao disporem-se como retas, colocam-se paralelamente ao chão ou perpendicular a ele e ao representar elementos com os materiais o mesmo ocorre. Assim tornou-se importante destacar a necessidade de investigarem o espaço, contemplando os fatores consideradas nos enunciados propostos, mas que podem se configurar de modos distintos.

Elementos mais comuns cotidianamente também se tornam referência para a expressão do compreendido ou para a elaboração de questionamentos. Assim, por exemplo, para dizer do ângulo entre duas retas, a aluna questiona: “posso dizer que duas retas concorrentes aqui o ângulo entre elas é menor que noventa?”. Nota-se que o ângulo reto, mesmo que excluído das possíveis respostas para o interrogado, é a referência que sustenta a indagação. Tal questionamento indicou a possibilidade de exploração das afirmações dos alunos em associação com a representação por meio do uso dos materiais. Nota-se que à medida que os encontros avançam, os próprios alunos se voltam reflexivamente para as suas conclusões,

efetuando análises que possam indicar novas experimentações sobre o afirmado ou imaginado.

Com relação à análise de situações envolvendo retas reversas, em diversos momentos, buscando a distância entre elas ou explicar uma propriedade, os alunos realizam movimentos de projeção ortogonal de uma sobre a outra. Novamente a ortogonalidade se enfatiza e os elementos ganham dinamicidade para possibilitar a expressão do compreendido. As retas ganham movimento, mantendo-se, porém, a mesma reta ao olhar dos alunos, ainda que tenha sido discutida a estaticidade de cada reta singular.

A ênfase naquelas situações mais cômodas, de certo modo se dá não apenas pelas suas possibilidades cotidianas, mas também pela acentuada repetição nos livros-textos matemáticos da Educação Básica e Superior daquelas representações usuais estabelecidas, e na pouca exploração das possibilidades espaciais. Por outro lado, revelam-se os insights manifestos pelos alunos ao adentrarem por horizontes de aberturas descortinadas no movimento dialógico, sustentado por compreensões ocorridas mediante a exploração do *entorno* pelo corpo-próprio, junto aos recursos materiais disponíveis e aos sujeitos.

Comunalização

O ambiente coletivo estabelecido nos encontros e o envolvimento entre os sujeitos promoveram um espaço no qual foi possível que as intencionalidades de cada consciência particular se dispusesse à comunalização das ideias, compreensões, interpretações e dúvidas. O trabalho em grupo e a ausência de atividades mecanizadas, de mera aplicação de conceitos, fortaleceram as relações empáticas surgidas.

A comunicação e a linguagem se revelaram em sua complexidade ao adentrarmos por discussões e temas surgidos no decorrer dos encontros, por iniciativa, muitas vezes, dos próprios alunos. Assim, por exemplo, as ideias emergentes em torno do conceito de ângulo destacaram como os diferentes sentidos, vivências e objetivações explicitados na coletividade constituída se enredam e as compreensões se reelaboram.

Em muitas situações, a expressão, de um sujeito ou de um coletivo, envolvia tantas ideias que se mostrou quase impossível acompanhar e compreender o que o(s) aluno(s) buscava(m) enfatizar ou o modo como procediam na busca de expor suas compreensões, desde as mais elaboradas ou apenas fugazes. Acrescente-se a isso a postura da pesquisadora, enquanto professora, que conduzia o processo sem imposição de direções previamente

definidas a respeito das discussões que se abriam e das solicitações por esclarecimentos e que, também, a todo o momento dirigia seus esforços tendo em vista que seus alunos evidenciassem da forma mais plena possível o que estavam compreendendo. Associados a essa postura de ouvir as perguntas e os encaminhamentos dos alunos, estão os momentos em que as respostas ou conclusões são apresentadas, pela pesquisadora aos alunos, de forma direta, talvez apressada, sem que todas as explorações possíveis tivessem possibilidade de ser realizadas. Ao mesmo tempo, fica o sentimento de que, de certo modo, os próprios alunos tinham a expectativa de exposições e explicações mais diretas, já que estavam ali para serem apresentados às ideias matemáticas. O excesso de questionamentos visando abrir espaço para que os alunos pensassem a respeito das questões levantadas, às vezes, parecia se tornar um obstáculo para as interações. Entendemos que a duplicidade de posturas assumida pela pesquisadora possa ter, em certos momentos, dificultado o andamento da investigação, por mais que tenhamos nos mantido atentos à interrogação norteadora deste estudo e às posturas condizentes à atitude fenomenológica.

Entretanto, mesmo frente a essas dificuldades, manifestaram-se compreensões e produções de sentido e de significados, disparando (re)elaborações conjuntas entre os sujeitos, incluindo entre eles a pesquisadora.

A complementação das ideias pelas falas, gestos e olhares, no movimento de constituição do sentido coletivo de uma ideia ou conceito, se evidencia em suas possibilidades de retomada e reflexão na exposição de compreensões ao outro e de fundamentação das próprias conclusões. As convergências e divergências de sentidos se resolviam no diálogo, sendo negociados frente ao proposto.

A explicitação de interpretações impróprias ou compreensões divergentes, passíveis de serem percebidas nos gestos e expressões verbais, eram retomadas buscando a sua clareza. Assim, por exemplo, quando um aluno aponta para o chão indicando um plano coplanar a duas retas reversas entre si, que na verdade eram paralelas a ele, sugere à pesquisadora que o “chão” sustenta tais retas, que poderiam ser projetadas sobre ele. Para todos os sujeitos presentes parece claro que, nesse caso, a conclusão do colega está errada, e foi simples também esclarecer que o afirmado não procedia. Nessa situação, o termo *coplanar* e o sufixo *co* foram tematizados, desvelando os sentidos associados a ele, permitindo um pensar junto sobre o significado do termo, avançando em significações possíveis.

Entendemos ter havido uma reorganização intersubjetiva que direciona as próprias ações advindas, em um fluxo no qual certos aspectos destacados são focados, ainda que tragam outras ideias em seu enredamento.

A eleição da melhor representação produzida pelos grupos indica a sintonia quanto às escolhas. Assim, um sistema de coordenadas elaborado com cartolina por um grupo se revelou mais adequado para que as análises coletivas se efetuassem, seja pela estética ou pela praticidade da representação.

Quando os alunos se mobilizam para representar situações espaciais a partir da sua própria posição, há um convite para a realização dos procedimentos conjuntos que possam explorar melhor ou diferentemente a região ocupada. Cada um indica possibilidades e se arrisca em outras sugeridas pelos sujeitos.

Outro aspecto que se destacou na sustentação do ambiente coletivo foi a necessidade de validação de conclusões, seja para a professora ou para os demais alunos, seja em sua obviedade ou nas evidências decorrentes da exploração do contexto proposto. Assim, por exemplo, a perpendicularidade de uma reta disposta em relação a outros elementos se deu como uma consequência decorrente da própria representação, sem que uma análise mais rigorosa matematicamente tivesse sido solicitada. Porém, ao buscar discutir sobre essa situação em termos de uma prova matemática, a professora se deparou com olhares interrogadores que revelavam considerar a obviedade da justificativa anterior uma prova mais válida que a apresentada por ela, na qual foi preciso ver “o que se diz e não o que a figura mostra”. Na discussão, ao questionar sobre a possibilidade de disposição de um plano e uma reta, as expressões se dão a partir da compreensão do ângulo reto, e, ainda que ele não fosse necessário, destacou-se nas análises dos alunos. Quando outro aluno apresenta sua conclusão, em seu modo direto de dizer, a resposta revelou-se engraçada, ainda que tenha sido aquela a afirmação buscada pela professora: “ou são paralelos ou não são paralelos”.

Foram diversas as situações nas quais os alunos, ao se atentarem para um mesmo foco, se agrupavam, analisavam conjuntamente o focado e buscavam expor a conclusão comum. Assim, ao analisar a representação de um sistema de coordenadas tridimensional representado em uma das questões propostas, um aluno interpreta a possibilidade de existência de planos que serviriam de base ou referência e apresenta o que visualiza para a colega. Juntos buscam explicitar o verificado à pesquisadora, explorando modos de exporem-se.

Os próprios enunciados, e não somente as soluções para o proposto, dispararam cocompreensões em busca de sentido para o solicitado e de interpretação dos termos utilizados. Por exemplo, em mais de uma situação o termo *sempre* desencadeou uma série de interpretações e ações distintas, que eram explicitadas e representadas com os materiais manipuláveis, buscando esclarecer o que foi interpretado, individualmente ou em grupo, para os demais. A retomada do enunciado se fez necessária, inclusive com destaque para a sua

entonação, a fim de possibilitar maiores evidências quanto ao sentido do termo na totalidade da frase.

Em muitas ocasiões, a expressão de um sujeito direciona a atenção das análises de outro, que busca também colocar a sua compreensão para o grupo a partir do exposto pelo colega. Quando uma aluna se refere à igualdade dos ângulos entre duas retas paralelas, ainda que se dê conta de que o que expôs não ocorria, outro sujeito foca a atenção na possibilidade exposta por ela, mas destacando aspectos distintos ao da colega, afirmando algo que se revela apropriado com relação aos ângulos determinados pelas retas paralelas.

O ambiente constituído nos encontros possibilitou aberturas e confiança para que as compreensões pudessem ser elaboradas e expostas, ainda que na insegurança quanto à validade do afirmado. Em sala de aula, um desafio é promover esse ambiente dialógico. Tal desafio aumenta considerando a quantidade de alunos por turma e a heterogeneidade quanto ao foco de atenção de cada um, frente a um ambiente que, em geral, é tradicionalmente expositivo e os sujeitos passivos ao que lhes é apresentado.

Apoio no material manipulável: possibilidades e limites

Um aspecto importante que se ressaltou diz das possibilidades e dificuldades advindas do uso de material manipulável. Se por um lado os materiais disponibilizados possibilitaram o diálogo e a complementação das falas na expressão do compreendido, por outro, em muitos casos, os sujeitos focaram em suas análises apenas os materiais e sua manipulação, não dando destaque ao fato de que eles apenas representam, parcialmente ou de modo incompleto, os entes geométricos em sua essencialidade, isto é, em suas características ideais. O material manipulável é limitado e não tem a precisão dos objetos geométricos, o que revela seus inconvenientes (necessários) em certas ocasiões. Ele não dá conta de representar apropriadamente as objetualidades geométricas e sempre é solicitada a compreensão destas pela imaginação, visualização e abstração. Entendemos que o material concreto auxiliou a disparar compreensões quanto ao ser dos entes geométricos quando utilizado com o devido destaque para características essenciais desses entes, o que se dava na discussão sobre o papel de sua representação.

Outro aspecto limitante do material manipulável refere-se à exposição aos colegas, tendo-o como recurso de apoio, já que certas posições na espacialidade da sala em que os

sujeitos estavam não possibilitavam uma visão plena do apresentado, prejudicando a compreensão do exposto.

Entretanto, ainda que a perfeição tenha ficado longe de ser alcançada (e sabemos que jamais o seria) e que algumas dificuldades tenham se destacado, o material manipulável mostrou-se um recurso importante para o ensino e para desencadear aprendizagem. Nas diversas atividades desenvolvidas, esses materiais colocados à disposição dos alunos se revelaram coadjuvantes nas investigações e possibilitaram que as ideias se apresentassem e reorganizassem a partir da discussão gerada.

Destacou-se ao nosso olhar o fato de as representações elaboradas pelos alunos não se restringirem a imitar aquelas apresentadas pela pesquisadora. A variedade de informações disponíveis em cada representação elaborada pelos alunos, individualmente ou em grupo, de um sistema de coordenadas, por exemplo, indicou um movimento de reflexão e a busca por expor aquelas informações que para eles se revelaram importantes. Assim, quando os alunos elaboraram uma representação em que o plano xy fica “suspenso”, seus gestos, a manipulação e a expressão quanto ao elaborado destacam a região abaixo desse plano (abaixo do “chão”), ressaltando uma possibilidade espacial.

Quando uma aluna considera cada plaquinha de isopor como um plano, a palavra *plano* revela-se em seu sentido de qualidade daquele objeto. Nesse caso, destacar o conceito de plano matemático e discutir sobre ele levou a novas reflexões quanto à sua infinitude, impossível de ser representada com o material concreto, mas passível de ser imaginada e intuída.

Pudemos constatar que a ideia de infinitude não se mostra passível de ser relacionada de modo direto com a representação material, gráfica ou mesmo imaginativa. Quando o aluno busca refletir sobre a figura formada por todas as perpendiculares a uma reta dada e que passam por um determinado ponto, a finitude do material não é superada de imediato, excluindo-se da análise do problema proposto o aspecto de infinitude da reta e a sua bidimensionalidade. Assim, a resposta de dois alunos representada por um desenho na lousa, inicialmente, apresenta alguns segmentos perpendiculares em torno da reta. A partir dos questionamentos e da análise do problema, os alunos notam a possibilidade de existir uma área totalmente preenchida pelas retas buscadas (ainda que não atentem para a infinitude das retas), representando o compreendido por um círculo totalmente preenchido e perpendicular à reta. Ainda frente aos questionamentos, aos poucos os alunos se dão conta de que a reta é algo que “continua” indefinidamente e os gestos complementam as ideias expostas, na impossibilidade de representar a situação plenamente no desenho na lousa. Eles visualizam a

determinação de um plano a partir das infinitas retas possíveis e dialogam sobre a dificuldade de compreensão sobre a infinitude dos elementos envolvidos.

É interessante o modo direto, por indicação ou simplesmente por gestos, mediante o qual os alunos expressavam suas compreensões, respondendo às questões propostas. O material manipulado pelo copo-próprio dá a resposta, mediante indicações, sem argumentações ou explicações. Assim, a infinitude de soluções para alguma questão proposta era indicada pela manipulação dos objetos, deslizando-os ou rotacionando-os, buscando expor uma possibilidade de se continuar indefinidamente a encontrar soluções paralelas. O uso de uma folha de papel foi o recurso utilizado para dizer da coplanariedade entre duas retas concorrentes, ainda que uma definição do termo não tenha sido tematizada ou discutida. O uso do elástico para apresentar disposições entre retas no espaço da sala exigiu um trabalho conjunto a fim de que pudessem explorar as diferentes condições solicitadas. Dentro do elástico os alunos se colocaram como pontos de uma reta.

A espessura do palito usado para dizer da reta, a impossibilidade de expor um plano em sua adimensionalidade, a própria materialidade dos objetos em sua não transparência indicam dificuldades de visualização e imaginação da idealidade dos entes geométricos a partir dos objetos manipuláveis. A reta ganha “lados” e o ponto pode ser representado em diferentes “tamanhos”, um ponto de uma reta pode estar em um de seus lados, o ponto de uma reta a divide em duas outras duas retas etc. Mas a constatação de interpretações incoerentes entre os sujeitos revela a busca por expor o modo “correto” de se abordar a situação. Assim, o aluno se volta para a colega e explica que o ponto não é apenas o que ela está representando com a caneta: “ele (o ponto) tá aqui e tá atrás também...”. E os sujeitos atentivamente alertam que se trata da mesma reta e não de duas retas distintas com origem em certo ponto.

Nota-se que o suporte dos materiais à disposição dos alunos articula os modos de expressão, enriquecem a investigação e possibilitam esclarecimentos. As ações estão vinculadas às intuições surgidas, expondo a racionalidade que se dá a partir dos materiais e frente às indagações formuladas. A expressão se reconfigura para apresentar um conceito ou expor possibilidades. Por isso entendemos que os materiais manipuláveis não são meros recursos palpáveis, já que sobre eles incidem análises e constatações que motivam a experimentação e a exploração das possibilidades abertas. A configuração elaborada subjetivamente busca, por meio dos materiais, expor-se na intersubjetividade constituída, explicitando compreensões.

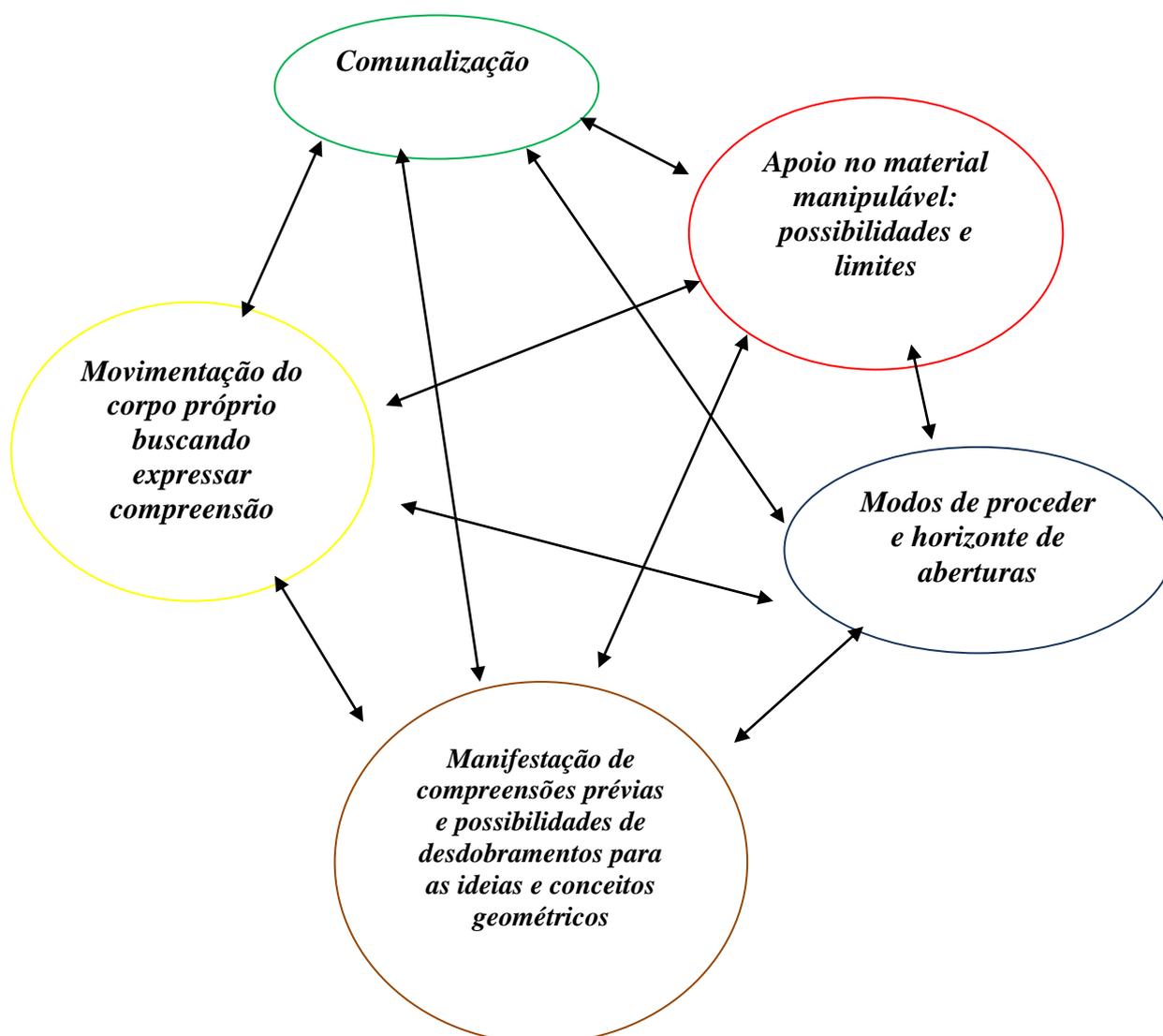
Ainda que exista o desafio didático de compreensão dos caminhos percorridos pelos alunos em suas análises com suporte nos materiais e da efetivação de argumentações dedutivas que superem a dimensão experimental, o material se apresenta como um suporte importante para que as intuições geométricas se presentifiquem no ambiente educativo em sua clareza evidente.

-----*-----

Ao dialogar sobre as *ideias nucleares* articuladas em nossas análises, destacou-se, mais enfaticamente ainda, o modo como elas se mostram entrelaçadas, já que, ao abrir a compreensão de uma, revelou-se impossível não adentrar por aspectos das demais. Foi uma difícil tarefa discernir quais situações apresentadas nas cenas seriam trazidas para ilustrar as análises efetuadas referentes a uma determinada *ideia nuclear*, já que, ao focar uma cena específica, percebíamos sua relação com as demais *ideias*.

Percebemos que as *ideias nucleares* constituem uma rede mais ampla a qual se revela na interconexão estabelecida entre elas (que sempre se mostram atreladas e não hierarquizáveis entre si), como apresentado a seguir:

REDE DE SIGNIFICADOS DAS IDEIAS NUCLEARES

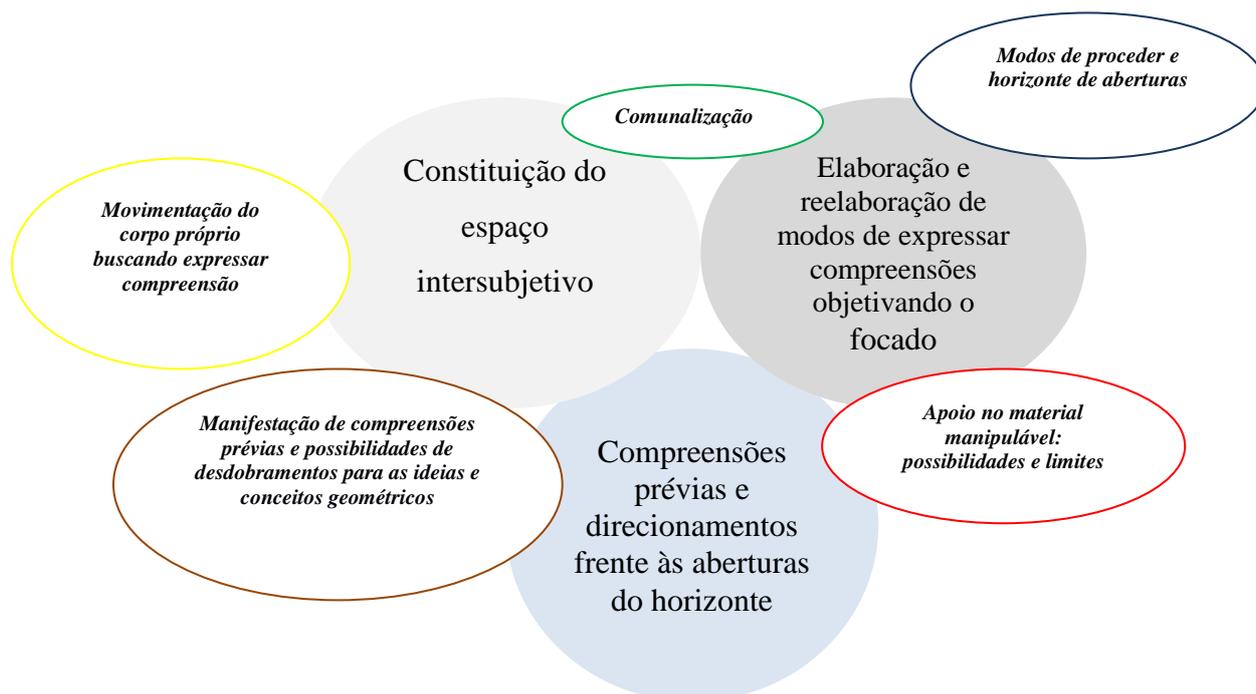


A rede constituída pelas *ideias nucleares* explicitou-se ao interrogarmos o conhecimento geométrico, buscando nas vivências dos encontros uma compreensão mais ampla no que diz respeito às possibilidades de constituição das ideias geométricas em situações de ensino e aprendizagem de conteúdos geométricos curriculares.

Dialogando com a interrogação posta, as atividades do curso, as ideias debatidas no grupo de pesquisa, os trabalhos dos autores lidos, nossas vivências de ensino e aprendizagem de Geometria etc. destacou-se a possibilidade de uma retomada da pesquisa, em uma síntese propulsora de aberturas diante da compreensão do *movimento de construção do conhecimento geométrico* em sua complexidade mundana.

A rede explicitada, conforme entendemos, direciona para compreensões mais abrangentes dessa *construção* em seus aspectos humanos, ou seja, enquanto vivências que se dão na temporalidade e espacialidade das relações intersubjetivas, no mundo-vida historicamente constituído em sua objetividade dinâmica.

Ao focar a rede constituída, perguntamo-nos, sempre e sempre, pelo sentido expreso, interrogando pela base sustentadora da interconexão das *ideias nucleares*, ou seja, pela estrutura que subjaz essa interconexão e se presentifica nas cinco *ideias nucleares* expostas. Demo-nos conta de que se ela se unifica em torno de ***Compreensões prévias e direcionamentos frente às aberturas do horizonte; Constituição do espaço intersubjetivo; e Elaboração e reelaboração de modos de expressar compreensões objetivando o focado***, podendo ser representada pelo esboço seguinte:



À luz dessa estrutura, discorreremos sobre os aspectos destacados ao longo da investigação, apresentando uma síntese compreensiva, não fechada em si de modo determinístico, mas aberta e interligada às demais experiências vividas quanto à produção do conhecimento geométrico.

4.4 Transcendendo as Análises Efetuadas: explicitação de uma síntese que busca por desdobramentos

Ao destacar as atividades de aprendizagem desencadeadas em situações de ensino de Geometria, que se dão em um ambiente dialógico e de corresponsabilidade, evidencia-se a manifestação do saber dos alunos já em um nível pré-predicativo que baliza as suas compreensões quanto aos objetos e propriedades geométricos, tomados como temas de ensino. Concomitantemente, ampliam-se as possibilidades de compreensão e de produção de conhecimento do sujeito, entendidas de uma perspectiva subjetiva, bem como se abrem esferas intersubjetivas em que a coparticipação dos sujeitos do conhecimento possibilita a reelaboração de entendimentos, aperfeiçoamento de ideias, compreensão de significados de conceitos, em uma produção coletiva. Há uma pré-doação de sentidos própria da experiência antepredicativa, em suas possibilidades e efetividade. Essa pré-doação abre-se à esfera intersubjetiva que pode se unificar em atos da percepção, manifestando-se em intuições que se doam na evidência do que se mostra, ou seja, dos sentidos e significados presentes à Geometria, tendo como fundo a sala de aula e as interações que aí ocorrem.

Os conteúdos geométricos carregam significados culturalmente construídos, expostos em uma linguagem específica, que indicam modos de proceder próprios do fazer matemático. Mas reconstruir, no ambiente da sala de aula, esses significados geométricos vai além da exposição dos conceitos matemáticos. Solicita um trabalho pedagógico voltado aos sentidos percebidos pré-predicativamente, bem como o avanço do assim percebido em expressões entre sujeitos, que, mediante linguagens gestual, pictórica, proposicional, por exemplo, vão se emaranhando em sentidos percebidos mais claramente, enrolando-se em significados presentes no mundo histórico-cultural e em práticas de possíveis aplicações. Esse movimento, em sua complexidade, carrega possibilidades de resignificação de significados já expostos e de produção do novo.

Conteúdos curriculares, compreensões prévias e recursos disponíveis se articulam de modo não fragmentado no movimento de construção do conhecimento geométrico em

ambiente de ensino. Não é suficiente a exposição de conceitos formalmente definidos e determinados, os quais se espera que sejam recebidos pelo aluno. A compreensão se dá no movimento da percepção dos sentidos (mesmo que não se dê conta disso) para os quais as próprias experiências remetem e se configura dentro de um campo de possibilidade aberta.

Os sentidos e significados evidenciados se presentificam por meio da linguagem e na própria manifestação expressiva se vivencia um ato ativo e dinâmico de elaboração daquilo que se busca expressar. A expressão verbal carrega consigo sentidos dados culturalmente, mas que só dizem na medida em que são significados subjetivamente, ou seja, vivificados pela consciência. A polissemia das palavras e a variedade dos sentidos percebidos nas vivências e indicadas nas palavras destacam a complexidade da comunicação e a impossibilidade de se aprisionar os sentidos e significados em correspondência biunívoca com as palavras.

Esta complexidade é constituída intersubjetivamente, ou seja, é produzida mediante sentidos e significados compreendidos e reelaborados na medida em que se está com o outro, cossujeito, em um movimento de comunicação que ocorre mediante a empatia e a linguagem. A atenção em ouvir a exposição de uma ideia, a sintonia nas falas que se presentifica no fluxo que movimenta a ação e os insights revelados ao outro indicam a constituição desse espaço intersubjetivo.

A cocompreensão se expõe na medida em que se dá em um solo comum, social e histórico, de experiências vividas por companheiros e em que os significados das articulações elaboradas, ainda que em diferentes perspectivas, enlaçam sentidos de suas vivências ao buscarem compreender e expor o compreendido sobre algo. Esse algo se doa em seu *para quê*, espacial e temporalmente considerado. Buscar seu sentido é vivificá-lo, experimentá-lo, percebê-lo. Abrir-se à compreensão expressa solicita o estabelecimento de relações empáticas em que o outro é visto como igual, capaz também de vivificar esses sentidos.

A experiência humana objetivante do espaço, presente na Geometria, não se dá historicamente desvinculada de um mundo passado e, também, não desdenha o mundo presente. A Geometria, entendida como ciência do mundo ocidental, é produzida no solo do mundo-vida e funda-se nas experiências do mundo pré-científico. Uma vez constituída, põe-se em suas idealidades objetivamente materializadas, destacando-se por um modo de proceder apropriado aos procedimentos da Matemática. Trata-se de uma elaboração humana que, ao organizar-se (constituir-se), já se dispõe numa estrutura basilar que a sustenta, na qual certos procedimentos que se mostram “produtivos” são repetidos e se constituem enquanto válidos.

Ainda que a compreensão das ideias geométricas exija processos subjetivos de reflexão, intuição e abstração, o conhecimento geométrico não se fecha na subjetividade: ele

se mantém intersubjetivamente em sua possibilidade de reativação ou preenchimento de sentido na correlação com o cotidiano, na compreensão das características da Geometria olhadas nos objetos e ações particulares, por uma consciência singular que sempre está com os seus sujeitos em um movimento de produção cultural.

Focando o ensino e a aprendizagem de Geometria e o conhecimento geométrico em suas possibilidades de entendimento e reelaboração subjetivas e intersubjetivas, damos conta da importância de se considerar a historicidade do fazer geométrico enquanto fenômeno humano, dado nas vivências no cotidiano do mundo-vida, porém passível de reelaborações que daí emergem, não se fechando nesse movimento. Compreendemos que o mundo se doa como sentido e que os sentidos percebidos solicitam por desdobramentos que ocorrem em atos da consciência, como os psico-fisiológicos, cognitivos e do juízo (espirituais), na comunicação e interpretação, e de que nos damos conta à medida que, de modo atento, buscamos compreender e refletir sobre eles.

O mundo dado pré-cientificamente na experiência vivida no cotidiano solicita, assim, por aberturas e encaminhamentos no ambiente coletivo de ensino e de aprendizagem. Retornar à subjetividade que compreende ao estar num solo comum aos sujeitos é o movimento que possibilita adentrar o pensamento pré-reflexivo e científico, destacando aspectos da relação entre a geometria formalizada e a espacialidade vivenciada pelo sujeito no dia a dia.

RETOMANDO REFLEXIVAMENTE O EFETUADO

Optamos, desde o início deste estudo, por olhar a geometria, focando as possibilidades e interpretações expressas quanto à disposição dos entes geométricos no espaço, a partir da experiência pré-predicativa vivida pelo corpo-próprio em um ambiente coletivo. Focamos a constituição e expressão de compressões e a comunalização das ideias surgidas e reelaboradas entre sujeitos que se dispuseram em um contexto de ensino pré-configurado (mas não de modo determinístico, e sim fluído) juntamente com recursos à disposição. Destacamos em nossas análises a estrutura da correlação intencional da subjetividade, da constituição da intersubjetividade e modos de objetivar as ideias geométricas focadas nesse ambiente coletivo.

Ainda que não tenhamos adentrado na investigação quanto às possibilidades subjetivas de efetuação dos processos de teorização geométrica, mesmo que em alguns momentos dos encontros as evidências surgidas pudessem ser exploradas em termos de direcionamento para esse aspecto, consideramos que as situações expostas nas cenas revelam modos de proceder que sustentam diferentes processos de compreensão e elaboração das ideias geométricas, dentre eles os encaminhamentos possíveis para a geometria axiomatizada.

Ao retomar agora a origem desta pesquisa e os percursos efetuados até aqui, identificamos aspectos da possibilidade de constituição do conhecimento geométrico em sua latência na própria elaboração do estudo de campo, já que o planejamento atento às atividades de ensino se dá a partir de questionamentos quanto ao que ensinar, para quem e com o uso de quais recursos. Focar essas questões destaca que a intersubjetividade explicitada nas análises do fenômeno já se constitui na própria pretensão de realização do curso.

A principal preocupação durante a realização do curso de extensão foi a de que os termos utilizados fizessem sentido para os alunos e que eles pudessem sentir segurança para dialogar. Como pudemos constatar, muitos termos eram conhecidos pela maioria deles, porém esse conhecimento não se expressava conforme os padrões matemáticos, ou seja, em sua objetividade matemática como presente nos livros e textos. A criação e sustentação de um ambiente de aprendizagem que tornou possível a manifestação de expressões autênticas, do ponto de vista de a pessoa se expor como sentia e do modo pelo qual compreendia, sem receio de ser ridicularizada ou endeusada, gerou clareiras e aberturas de compreensão e diálogo sobre os significados apresentados. Foi relevante para nós constatar que essa liberdade vivida se intensificou a medida que os encontros foram acontecendo possibilitando que tais clareiras e aberturas se ampliassem ao longo dos encontros havidos.

Estar com os alunos, buscando compreender para além da vivência específica de uma situação, a fim de adentrar por análises quanto ao sentido dessas compreensões, solicita uma abertura que dá destaque ao “ouvir”, ou seja, perceber dúvidas e reelaborar ações, buscando a todo momento que a idealidade própria aos conteúdos abordados, em sua formalidade ou não, seja vivificada pelo outro. Há uma copresença eu-outro que se expõe em um solo de experiências copartilhadas e que sustenta a compreensão do que o outro diz, possibilitando que certa ideia (conhecida daquele que ensina) faça também sentido para o sujeito ou o coletivo ao qual a preocupação de ensinar está voltada. E aquele que ensina, muitas vezes, pretende que faça o mesmo sentido. Mas, adentrar dialogicamente pelas possibilidades significativas abertas de determinada ideia geométrica revela um ir além de um sentido pontual e determinado, e desvela possibilidades de um trabalho coletivo a partir dos sentidos percebidos e em direção à objetividade da ideia geométrica em foco na situação de ensino.

Esse movimento, conforme entendemos, sustenta a *possibilidade de construção do conhecimento geométrico em sala de aula*. Ao buscar compreender a expressão do aluno, nos colocamos como arqueólogos rastreando a estrutura racional pela qual podemos “decifrar” falas, desenhos e gestos, investigando os indícios daquilo que se mostra e adentrando pelas reelaborações quanto aos modos de agir frente ao conteúdo abordado.

Conceber o espaço sem o estabelecimento de uma teoria geométrica determinada a priori, ou seja, o mais livre quanto possível de um modo único e predeterminado de interpretá-lo e compreendê-lo, pode abrir possibilidade de se avançar tematizando as diferentes geometrias e indagando sobre sua presença e sobre o que dizem da nossa experiência espacial cotidiana (e vice-versa).

Outro aspecto que se destacou nessa retrospectiva da pesquisa se refere à descrição dos dados. Descrever é necessariamente integrar à descrição de uma experiência singular aspectos que dependem da memória, da imaginação e da própria escrita de quem descreve. Mesmo que mobilizemos nossos esforços para não negligenciar facetas da coisa descrita nem preenchê-la para além do que ela apresenta, provamos da impossibilidade de atingir tal objetivo plenamente. O leitor, na medida em que não vivenciou a experiência descrita, terá apenas a perspectiva pela qual quem descreve a apresenta, mas por sua vez, sua compreensão redireciona tal perspectiva na abertura de possibilidades de interpretação, memória e imaginação próprias, revivificando-a. A busca por uma autenticidade que seja confiável e que possa oferecer a maior proximidade com a vivência do fenômeno conforta esse sentimento de incompletude e incerteza, e a possibilidade de que a linguagem dará conta de comunicar ao

outro os sentidos desvelados em sua origem permite a coparticipação da experiência vivida, dotando-a de uma qualidade de “verdade” intersubjetiva.

Se nesse momento pudéssemos expressar o sentido da experiência vivida e responder ao interrogado nesta pesquisa de outro modo que não o escrito, com um desenho, por exemplo, que expusesse o vivido no modo pelo qual ele foi se doando e fazendo sentido, haveria pessoas, balões de diálogo, figuras geométricas, objetos cotidianos, onomatopeias indicando movimentos e, por meio de uma perspectiva, a doação de profundidade ao desenho. Estes seriam elementos destacados à espera da interpretação de um possível expectador. Mas assim como o texto escrito, os sentidos a serem desvelados não se completariam plenamente no desenho expresso, ao mesmo tempo em que transcenderiam a mera ilustração apresentada. E ainda assim, a comunicação seria possível!

Refletindo em termos do que se destacou para além da pergunta de pesquisa, e adentrando pela Educação Matemática em seus inquéritos, considerando os diferentes conteúdos geométricos e distintos ambientes de ensino, nos indagamos também sobre aquelas situações que propiciam que a criatividade e a imaginação auxiliem na construção desse conhecimento e na exploração dos processos de elaboração e reelaboração pelos alunos. É certo que cada sala de aula se configura nas disposições e humores dos sujeitos, incluindo-se professores, em suas intencionalidades atuantes. É certo ainda que tomar o conceito geométrico apresentado buscando compreender o dito é uma decisão, ainda que irrefletida, própria da postura de cada um. Posso buscar pelo sentido daquilo ou não. Posso apenas aceitar conclusões e fórmulas passivamente ou buscar compreender sua fundamentação.

Avaliar e tomar decisões é uma ação que cabe a cada um, mas que não se desliga daquelas motivações, ou mesmo desafios, postos à subjetividade. Por isso compreendemos que, no ambiente de ensino, fazer o “convite” e propor situações que promovam o diálogo e a manifestação das compreensões, avançando no fundamento destas operações de contemplação sugerem um caminho mais propício para a construção do conhecimento geométrico. Dentre os recursos e aspectos que o professor pode enfatizar destacam-se o próprio espaço da sala de aula, os recursos computacionais disponíveis, os mais simples materiais concretos (como palitos, linha etc.), que, quando considerados em sua possibilidade de ativação e análise dos significados constituídos coletivamente, se colocam como possibilidades didaticamente ricas.

Nesse sentido, se revela importante que os cursos de formação de professores se atentem para atividades, práticas e situações nas quais se dá destaque aos atos intencionais que propiciam a experimentação da evidência de um conceito geométrico (ou matemático de modo geral) a partir dos conhecimentos prévios dos alunos. Valorizar, em suas possibilidades

didáticas, compreensões que destaquem aspectos das vivências dos sujeitos da aprendizagem indica possibilidades de se compreender a genética do conhecimento matemático da perspectiva de sua constituição para o sujeito e não apenas enquanto um conteúdo a ser transmitido sem mais reflexões sobre o como cada um elabora e reelabora suas compreensões em sala de aula.

É importante que seja dito que as atividades aqui propostas e o conhecimento que pode delas ser gerado não dão conta de todo um curso que almeja trabalhar a geometria como proposta na ementa de disciplinas. Elas possibilitam, entretanto, compreender a constituição das ideias e percebê-las sendo intuídas, clareando possíveis desdobramentos que se direcionem para a explicitação mediante linguagem dessas compreensões, bem como, para a linguagem formalizada tal como trabalhada pela matemática.

Estar com o outro em situação de ensino é também mobilizar compreensões quanto àquilo que se ensina e aos modos de abordá-lo. É compreender que as ideias geométricas são pré-predicativamente dadas, podendo ser experienciadas pré-cientificamente nas mais diversas situações. Explorar as intuições advindas dessas experiências abre um vasto horizonte para além do mero experienciar.

BIBLIOGRAFIA

- ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 2007.
- ABBOTT E. A. *Flatland: A Romance of Many Dimensions*. New York: Penguin Putnam, 1984.
- ALES BELLO, A. *L'universo nella coscienza: introduzione Allá fenomenologia di Edmund Husserl, Edith Stein, Hedwig Conrad-Martius*. Pisa: Edizioni ETS, 2003.
- ALES BELLO, A. *Introdução à fenomenologia*. Tradução Ir. Jacinta Turolo Garcia e Miguel Mahfoud. Bauru: EDUSC, 2006.
- ANASTÁCIO, M. Q. A. O Corpo e a Matemática: uma concepção Merleau-Pontyana de conhecimento. In *Boletim de Educação Matemática*. Ano 16, n.20, 2003, p.56-73.
- BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1995.
- BOULOS, P. & CAMARGO, I. *Geometria analítica: Um Tratamento Vetorial*. São Paulo, McGraw-Hill, 2005.
- BICUDO, I. Platão e a Matemática. In *Letras Clássicas*, n.2, p.301-315, 1998.
- BICUDO, M. A. V. A constituição do objeto pelo sujeito. In TOURINHO, C. D. C. (Org.) *Temas em fenomenologia*. Rio de Janeiro: Booklink, 2012.
- _____. (Org.). *Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica*. São Paulo: Cortez, 2011.
- _____. *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. 1 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2010.
- _____. *Filosofia da Educação Matemática: por quê?* In *Boletim de Educação Matemática*. Rio Claro, ano 22, n. 32, 2009.
- _____. *Fenomenologia: confrontos e avanços*. São Paulo: Cortez, 2000.
- _____. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999.
- _____. *Fenomenologia: uma visão abrangente da educação*. São Paulo: Olho d'Água, 1999.
- _____. A contribuição da Fenomenologia à Educação. In: BICUDO, M. A. V.; CAPPELLETTI, I. (Org.). *Fenomenologia uma visão abrangente da educação*. São Paulo: Olho D'água, 1999.
- _____. Sobre a Origem da Geometria. *Cadernos da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos*, São Paulo, v. 1, n.1, p. 49-72, 1993.

BICUDO, M. A. V.; ESPÓSITO, V. H. C. (Orgs.) Pesquisa qualitativa em educação: um enfoque fenomenológico. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1994.

BICUDO, M. A. V.; KLUTH, V. S. Geometria e Fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. 1 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

CAPALBO, C. *Principais conceitos da fenomenologia de Husserl*. Disponível em <<http://www.filoinfo.bem-vindo.net/filosofia/modules/articles/article.php?id=12>> acessado em 10/02/2011.

CHAUÍ, M. Ontologia Regional. In: HUSSERL, E. *Investigações lógicas – sexta investigação*. São Paulo: Ed. Nova Cultural, 2000 (Coleção Os Pensadores).

DETONI, A. R. A geometria se constituindo pré-reflexivamente: propostas. In *Revista Eletrônica de Educação*. São Carlos, v. 6, n. 2, nov. 2012. Disponível em <<http://www.reveduc.ufscar.br>> acesso em nov. 2012.

_____. Expressão Gráfica e Conhecimento sobre a percepção espacial. *Revista Escola de Minas*. Ouro Preto, v.54, n.1, 2001. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0370-44672001000100014&script=sci_arttext>. Acesso em: 15/04/2012.

_____. *Investigações acerca do espaço como modo de existência e da Geometria que ocorre no pré-reflexivo*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2000.

DETONI, A. R.; PAULO R. M. A Organização dos dados da pesquisa em cena: um movimento possível de análise. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica*. São Paulo: Cortez, 2011.

_____. A organização dos dados da pesquisa em cenas. In: BICUDO, M. A. V. *Fenomenologia: confrontos e avanços*. São Paulo: Cortez, 2000.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Geometria Espacial*. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 10, 5ª Edição, Atual Editora, 1999.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Geometria Plana* Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9, Atual Editora, 1997.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. 2 Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

GURWITSCH, A. Husserl's Theory of Intentionality of Consciousness Dreffus, Hubert L A; Hall, Heruson (editors) *Husserl Intentionality and cognitive sciences*. Cambridge: The MIT Press, 1987.

HEIDEGGER, M. *Ser e tempo*. Tradução de Márcia Sá Cavalcante Schuback. Petrópolis: Vozes, vol 1, 2001.

HOUAISS, A. VILLAR, M. de S.; FRANCO, F. M. M. *Dicionário Houaiss da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

HUSSERL, E. *A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental* : uma introdução à filosofia fenomenológica. Trad. Diogo Falcao Ferrer. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

_____. *Idéias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica*. Tradução de Marcio Suzuki. 2ª ed. São Paulo: Idéias & Letras, 2006.

_____. *Investigações Lógicas. Sexta Investigação*. Tradução de Zeljko Loparic e Andréa M. A. C. Loparic. São Paulo: Abril Cultural, 1980. (Coleção Os Pensadores)

_____. The Origen of Geometry. In:_____. *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*. Evanston: Northwestern Press, 1970.

_____. *A origem da geometria*. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. Disponível em www.sepq.org.br, acesso 11/11/2011.

KLUTH, V. S. Dos Significados da Interrogação para a Investigação em Educação Matemática. In *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 14, n. 15, 2001.

_____. O conhecimento geométrico: trama de vivências corpóreo-sócio-culturais. In: BICUDO, M. A. V.; BELLUZZO, R. C. B. *Formação humana e educação*. Bauru: Edusc, 2001.

_____. Um estudo introdutório sobre a abstração como idealização. In *Anais do III SIPEM*. Águas de Lindóia, III SIPEM, 2006.

MARTINS, J. *Um enfoque fenomenológico do currículo: educação como poíesis*. São Paulo: Cortez, 1992.

MARTINS, J.; BICUDO, M.A.V. *A Pesquisa Qualitativa em Psicologia: Fundamentos e Recursos Básicos*. São Paulo: Editora Moraes, 1989.

MERLEAU-PONTY, M. *O primado da percepção e suas consequências filosóficas*. Trad. Constança Marcondes César. Campinas, SP: Papirus, 1990.

MONDINI, Fabiane; MOCROSKY, Luciane ; SANTOS, Marli. Regina. Compreensões de Geometria expressa por crianças: prelúdio fenomenológico. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: Editora UNESP, v. 1, p. 2010.

PAULO, R. M. *A compreensão geométrica da criança: um estudo fenomenológico*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

SALANSKI, J. M. *Husserl*. Trad. Carlos Alberto Ribeiro de Moura. São Paulo: Estação Liberdade, 2006.

SANTOS, M. R. *Pavimentações do plano: um estudo com professores de Matemática e Arte*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SANTOS, M. R.; MURARI, C. O trabalho pedagógico com pavimentações do plano no ensino e aprendizagem de Geometria. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: Editora UNESP, 2010, v. 1.

SANTOS, Milton. *A Natureza do Espaço: Técnica e Tempo, Razão e Emoção*. 4. ed. São Paulo: Edusp, 2006.

SILVA, J. J. Fenomenologia e Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

_____. *Filosofias da matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

_____. Matemática e fenomenologia. In *Anais do II SIPEM*. Bauru, 2004. Disponível em <http://www.sepq.org.br/IIsipeq/anais/pdf/mr1/mr1_2.pdf> acesso em 10/12/2011.

SKOVSMOSE, O. *Educação Crítica – Incerteza, Matemática, responsabilidade*. São Paulo: Cortez editora, 2007. Parte 2: Matemática em ação.

SOARES, F. P. *A idealidade e a fenomenologia nas investigações lógicas de Husserl*. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

STEINBRUCH, A. ; WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. São Paulo, McGraw-Hill, 1987.

STRUIK, D. J. *História Concisa das Matemáticas*. Trad. João Cosme S. Guerreiro. Lisboa: Gradativa, 1997.